Course

自动控制原理 I

Instructor: 李世华

School of Automation

Southeast university

Any comments, please feel free to contact me

(中心楼608, E-mail: lsh@seu.edu.cn, Tel.:83793785(o))

Chap 4 控制系统的稳定性分析

稳定性分析的意义

稳定性是控制系统能够正常工作的首要条件。

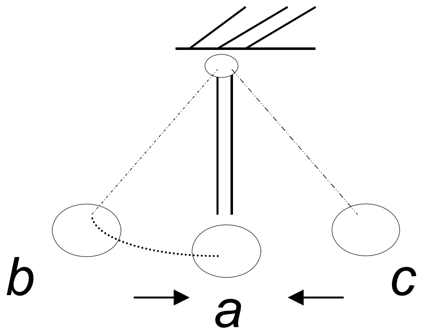
稳定压倒一切。

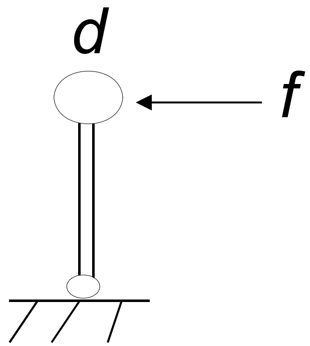
只有稳定的情况下，性能分析和改进才有意义。

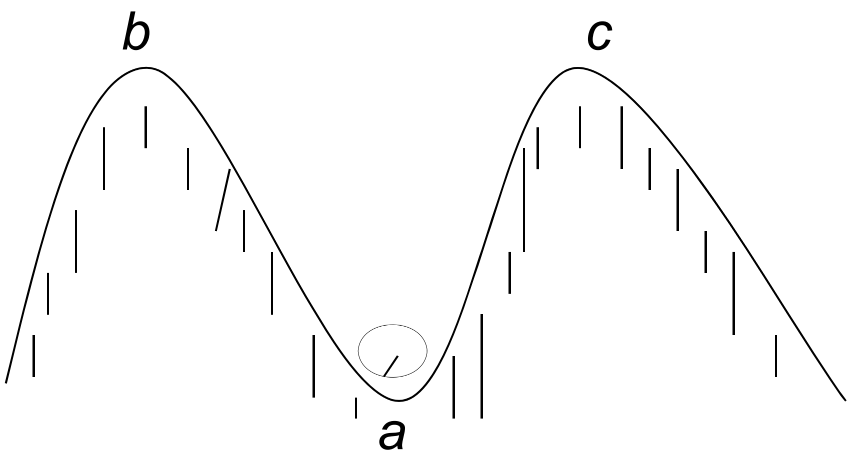
负反馈只是使系统稳定的一种手段，并不一定能够保证闭环系统的稳定。例子：带大惯性和时滞的系统

Chap 4 控制系统的稳定性分析

4.1　稳定性(stability)的概念和定义







平衡点

单/多平衡点系统

干扰，偏差

稳定的物理意义

稳定范围/区域

维持平衡的能力

4.1　稳定性的概念和定义

若控制系统在任何足够小的初始偏差作用下，随着时间的推移，偏差会逐渐衰减并趋于零，具有恢复原平衡状态的性能，则称该系统是稳定(stable)的；否则，称该系统是不稳定(unstable)的。

可通过研究描述系统的微分或差分方程的解得到系统稳定性。

Chap 4 控制系统的稳定性分析

4.2　线性系统稳定的充分必要条件

4.2.1　状态空间模型

4.2.2　输入输出模型

若讨论稳定性是基于I/O模型的，则只关心输出值在输入消失后是否收敛到有限值－**输入输出稳定性**(I/O stability)

不同于：　状态空间模型/Lyapunov stability

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=Ku(t) \qquad T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=K_1\frac{du(t)}{dt}+K_2u(t)$$

一个连续LTI系统I/O稳定的充要条件

它的微分方程描述的特征方程的根全都具有负实部

或：它的传递函数的极点都位于复平面的左半部

如果特征方程在复平面的右半部没有根，但在虚轴上有根且该根非重根，则称系统是I/O临界稳定的。(Note:工程上不存在！)

4.2 线性系统稳定的充分必要条件

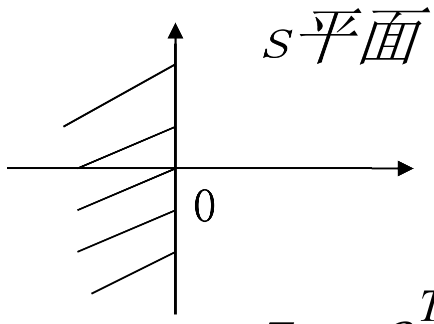
$$y(k)-5y(k-1)+6y(k-2)=u(k-1),\quad k\geq 0$$

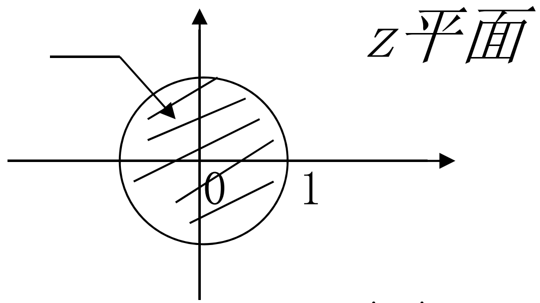
$$y(k)=0.5-2^{k+1}+1.5\times 3^{k},\quad k\geq 0$$

4.2.3 离散控制系统

一个离散LTI系统I/O稳定的充要条件：
它的脉冲传递函数的特征根(即脉冲传递函数的极点)全部在Z平面以原点为中心的单位圆内

脉冲传递函数的极点除了在单位圆内，还有在单位圆上的极点且该根非重根，则称系统是I/O临界稳定的。





$$z=e^{Ts},s=\sigma+j\omega \qquad |z|=e^{T\sigma},\angle z=T\omega$$

左/右平面，虚轴 $\rightarrow$ ？

Chap 4 控制系统的稳定性分析

4.3　系统稳定性的代数判据

对象：微分/差分方程描述对象(I/O模型)→I/O稳定性

意义：定量求解(难) ⟶定性求解(判据)

特点：根据特征方程各项系数确定特征根的(复平面)位置

4.3.1　连续系统稳定性的代数判据及其应用

劳斯（Routh， 1877 ）判据

霍尔维茨（Hurwitz， 1895）判据

通常合称为劳斯－霍尔维茨判据

4.3　系统稳定性的代数判据

一、Routh判据

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0, \qquad (a_n > 0)$$

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & & & \\
s^2 & e_1 & e_2 & & \\
s^1 & f_1 & & & \\
s^0 & g_1 = e_2 = a_0 & & &
\end{array}$$

线性系统稳定$\leftrightarrow$

特征方程的全部系数均为正数，并且由特征方程系数组成的Routh阵的第一列的元素全为正数.

不稳定根的个数＝Routh第一列元素变符号次数

要求：判稳，不稳根数目，虚轴根情况

Routh判据

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & a_3 & a_1 \\
s^2 & a_2 & a_0 \\
s^1 & \dfrac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_2} & 0 \\
s^0 & a_0 &
\end{array}$$

$$a_3, a_2, a_1, a_0 > 0$$

$$a_1 a_2 > a_0 a_3$$

4.3　系统稳定性的代数判据

二、特殊情况

1、劳斯阵某一行第一个元素为零，而其余元素不全为零

方法a：则可以用一个很小的正数代替它，而继续按上述公式计算下一行的项。计算结果如果是第一列（即）的上项和下项符号相反，则计作一次符号变化。

$$s^3 - 3s + 2 = 0$$

直接分析是否稳定？

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & -3 \\ s^2 & \varepsilon & 2 \\ s^1 & -3-\dfrac{2}{\varepsilon} & \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

2次符号变化,在右半s平面有2个不稳定的根

4.3　系统稳定性的代数判据

二、特殊情况

1、劳斯阵某一行第一个元素为零，而其余元素不全为零

方法b：用(s+a),a>0去乘D(s)得E(s)，Routh判据求E(s) 。

$$(s^3-3s+2)(s+3)=s^4+3s^3-3s^2-7s+6=0$$

s^4	1	-3	6
s^3	3	-7	0
s^2	-2/3	6	
s^1	20		
s^0	6		

2次符号变化,在右半s平面有2个不稳定的根

4.3　系统稳定性的代数判据

二、特殊情况

2、劳斯阵某一行元素全为零（存在大小相等关于原点对称的根）

方法：可将不为全零的最后一行的各项组成一个辅助多项式，并用这个多项式各项对s求导所得的系数代替全为零行的各项，则可以继续计算劳斯阵的以下各行．而那些大小相等而关于原点对称的根也可以通过求解这个辅助多项式而得出。

$$s^4+5s^3+10s^2+20s+24=0$$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 10 & 24 \\
s^3 & 5 & 20 & \\
s^2 & 6 & 24 & \\
s^1 & 0 \leftarrow 12 & & \\
s^0 & 24 & &
\end{array}$$

这表明系统有一对纯虚根存在。系统是临界稳定的。

$$\pm 2j, -2, -3$$

→辅助多项式＝$P(s)=6s^2+24$

$$P'(s)=12s$$

4.3 系统稳定性的代数判据

二、特殊情况

2、劳斯阵某一行元素全为零

$$s^5+2s^4+24s^3+48s^2-25s-50=0$$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 24 & -25 \\
s^4 & 2 & 48 & -50 \\
s^3 & 0 & 0 &
\end{array}$$

→辅助多项式 $=P(s)=2s^4+48s^2-50$

$$P'(s)=8s^3+96s$$

4.3　系统稳定性的代数判据

二、特殊情况

$$s^5+2s^4+24s^3+48s^2-25s-50=0$$

s^5	1	24	-25
s^4	2	48	-50
s^3	8	96	
s^2	24	-50	
s^1	112.7	↲	一次变号
s^0	-50		

表明原系统方程有一个正实根。
通过求解辅助多项式，
得到关于原点对称的根

$$2s^4+48s^2-50=0$$

$\pm 1, \pm j5$

系统有一个不稳定正实根，有一对虚根（$\pm$ j5）

Note：上述两种特殊情况，即使计算所得劳斯阵第一列元素大于零，也只能确定系统是临界稳定的，即原系统至少有一对特征根在虚轴上。 ？

4.3　系统稳定性的代数判据

二、特殊情况

$$s^6+s^5+3s^4+3s^3+3s^2+2s+1=0$$

例4.9

(p.140)

书上

方法

自学

$$\begin{array}{llllll}
+s^6 & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
+s^5 & 1 & 3 & 2 & & \\
+s^4 & 0 \leftarrow \varepsilon & 1 & 1 & & \\
-s^3 & \dfrac{3\varepsilon-1}{\varepsilon} & \dfrac{2\varepsilon-1}{\varepsilon} & & & \\
+s^2 & \dfrac{-2\varepsilon^2+4\varepsilon-1}{3\varepsilon-1} & 1 & & P(s)=s^2+1 & \\
+s^1 & \dfrac{4\varepsilon^2-\varepsilon}{2\varepsilon^2-4\varepsilon+1} \leftarrow 2 & 0 & & & \\
+s^0 & 1 & & & &
\end{array}$$

2个右半s平面根，有一对特征根±i在虚轴上。

4.3 系统稳定性的代数判据

三、Hurwitz判据

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0, \qquad (a_n > 0)$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & a_{n-1} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_2 & a_0 \end{vmatrix}_{n \times n}$$

线性系统稳定$\leftrightarrow$ 由特征方程系数组成的Hurwitz行列式的各阶主子式均大于0

$$D_1 = a_{n-1} > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0, \quad \cdots D_n = D > 0$$

4.3 系统稳定性的代数判据

Hurwitz判据↔Routh判据的等价关系

$$a_{n-1} = D_1$$

$$b_1 = D_2 / D_1$$

$$\vdots$$

$$g_1 = D_n / D_{n-1} = a_0$$

Note：

Hurwitz判据没有直接给出非稳定根分布情况

Hurwitz判据对高阶系统存在矩阵行列式计算问题

计算机实现，数值稳定性问题

4.3　系统稳定性的代数判据

四、劳斯－霍尔维茨判据的应用

1．判别反馈系统的稳定性

$$0.001s^4+0.05s^3+0.2s^2+0.4s+1=0$$

$$D=\begin{vmatrix} 0.05 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.001 & 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0.2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_1=0.05$$

$$D_2=0.05\times0.2-0.001\times0.4>0$$

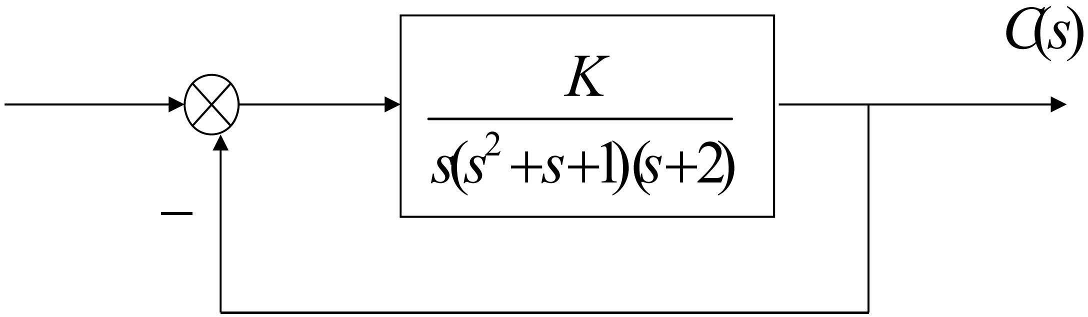
$$D_3=0.4\times0.2\times0.4-0.4^2\times0.001-0.05^2>0$$

$$D_4=1\times D_3>0$$

4.3 系统稳定性的代数判据

四、劳斯—霍尔维茨判据的应用

2. 分析系统参数变化对稳定性的影响



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2+s+1)(s+2)+K}$$

特征方程

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 3 & K \\
s^3 & 3 & 2 & \\
s^2 & \dfrac{7}{3} & K & \\
s^1 & 2-\dfrac{9}{7}K & & \\
s^0 & K & &
\end{array}$$

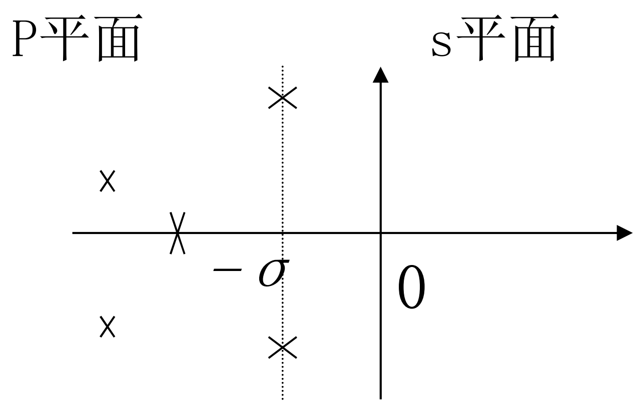
$$14/9 > K > 0$$

4.3　系统稳定性的代数判据

四、劳斯—霍尔维茨判据的应用

3．确定系统的相对稳定性

在时域分析中，常常以实部最大的特征根和虚轴之间的距离 σ *表示系统的**相对稳定性和稳定裕度***。



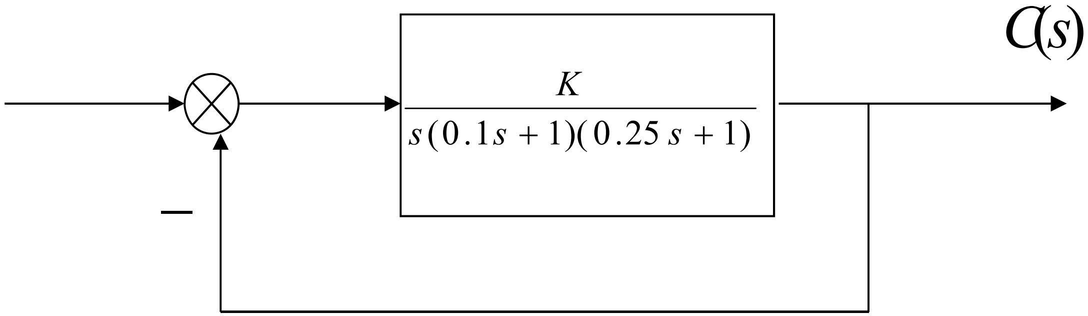
若系统的全部特征根都在垂线x=－σ 的左边，则称该系统具有 σ *的稳定裕度。*

方法：$s=p-\sigma$

物理意义？

4.3　系统稳定性的代数判据

四、劳斯—霍尔维茨判据的应用



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K^*}{s(s+4)(s+10)+K^*}$$

$$\begin{array}{c|ll}
s^3 & 1 & 40 \\
s^2 & 14 & K^* \\
s^1 & \dfrac{560-K^*}{14} & \\
s^0 & K^* &
\end{array}$$

$$0 < K^* < 560$$

$$0 < K < 14$$

$$(p-1)^3 + 14(p-1)^2 + 40(p-1) + K^* = 0$$

$$p^3 + 11p^2 + 15p + (K^* - 27) = 0$$

$$\begin{array}{c|ll}
p^3 & 1 & 15 \\
p^2 & 11 & K^* - 27 \\
p^1 & \dfrac{165-(K^*-27)}{11} & \\
p^0 & K^* - 27 &
\end{array}$$

$$0.675 < K < 4.8$$

4.3　系统稳定性的代数判据

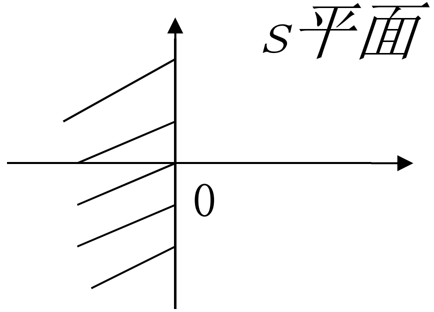
4.3.2 离散系统稳定性的代数判据

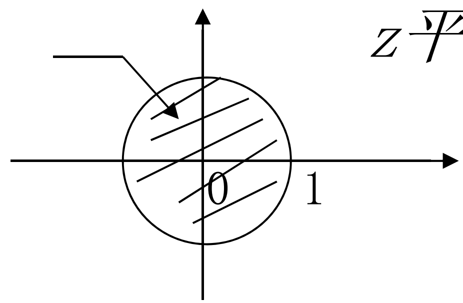
离散系统稳定的充要条件是其特征方程的根全部位于Z平面上以原点为圆心的单位圆内.

一、劳斯—霍尔维茨判据的应用

原理：建立z平面单位圆和s平面左右平面，虚轴映射关系

$$z=\frac{s+1}{s-1} \qquad s=\frac{z+1}{z-1}$$　双线性变换





左/右平面，虚轴 $\leftrightarrow$?

$z=e^{sT}$?

4.3.2 离散系统稳定性的代数判据

一、劳斯－霍尔维茨判据的应用

(1)求出离散系统的特征方程 D(z)

(2)z=(s+1)/(s-1),D(z)→ $\overline{D}(s)$

(3)利用Routh-Hurwitz判据判稳

4.3.2 离散系统稳定性的代数判据

一、劳斯一霍尔维茨判据的应用

$$D(z) = 45z^3 + 117z^2 + 119z + 39 = 0$$

$$45\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^3 + 117\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^2 + 119\left(\frac{s+1}{s-1}\right) + 39 = 0$$

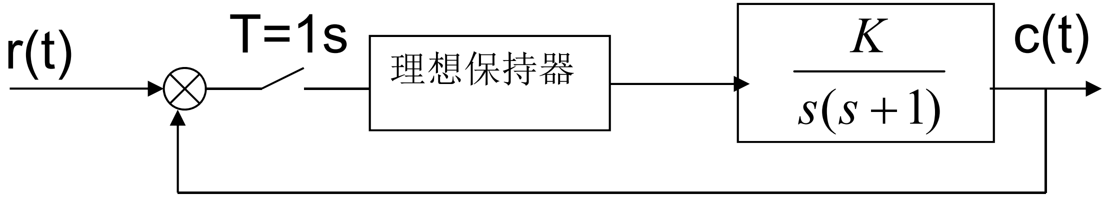
$$\overline{D}(s) = 8(40s^3 + 2s^2 + 2s + 1) = 0$$

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 40 & 2 \\
s^2 & 2 & 1 \\
s^1 & -18 & \\
s^0 & 1 &
\end{array}$$

有两个根在单位圆外,
此离散系统不稳定

4.3.2 离散系统稳定性的代数判据

一、劳斯—霍尔维茨判据的应用



$$G_0(s)=\frac{K}{s(s+1)}=K\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right) \qquad G_0(z)=\frac{Kz(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

$$D(z)=(z-1)(z-e^{-T})+Kz(1-e^{-T})=z^2+(0.63K-1.37)z+0.37=0$$

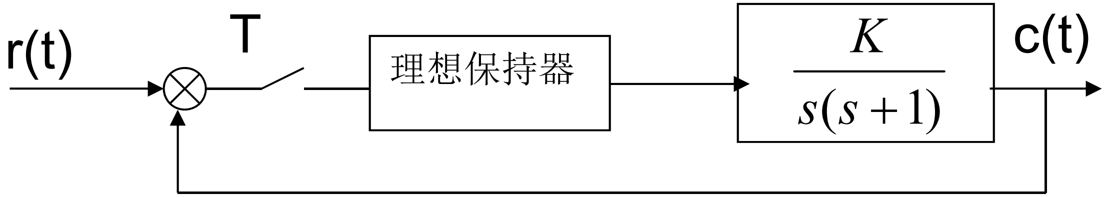
$$\overline{D}(s)=0.63Ks^2+1.26s+2.74-0.63K=0$$

$$0<K<4.35$$

引入采样开关会降低系统的稳定范围。

4.3.2 离散系统稳定性的代数判据

一、劳斯—霍尔维茨判据的应用



$K=10$ 确定采样周期T的取值范围

$$D(z)=z^2+(9-11e^{-T})z+e^{-T}=0$$

$$10(1-e^{-T})s^2+2(1-e^{-T})s+(12e^{-T}-8)=0$$

$$\begin{cases}1-e^{-T}>0\\12e^{-T}-8>0\end{cases}\qquad 0<T<0.405$$

采样周期越大，系统的稳定范围越小.

4.3.2 离散系统稳定性的代数判据

二、朱利(Jury)判据-直接判据

$$D(z)=a_n z^n + a_n z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0, \qquad a_n > 0$$

列 / 行	z^0	z^1	z^2	$\cdots$	z^{n-k}	$\cdots$	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-k}	$\cdots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_k	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	$\cdots$	b_{n-k}	$\cdots$	b_{n-2}	b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_{k-1}	$\cdots$	b_1	b_0	
5	c_0	c_1	c_2	$\cdots$	c_{n-k}	$\cdots$	c_{n-2}		
6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	$\cdots$	c_{k-2}	$\cdots$	c_0		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$						
$2n-5$	l_0	l_1	l_2	l_3					
$2n-4$	l_3	l_2	l_1	l_0					
$2n-3$	m_0	m_1	m_2						
2n-2	m_2	m_1	m_0						

4.3.2 离散系统稳定性的代数判据

二、朱利(Jury)判据-直接判据

$$D(z)=a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0, \qquad a_n > 0$$

离散线性定常系统稳定的充分必要条件是

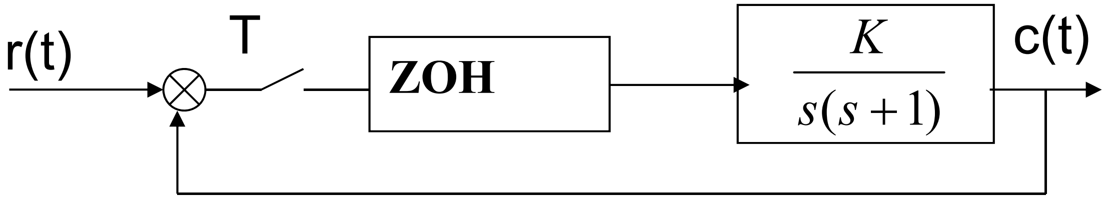
$$D(1) = D(z)\big|_{z=1} > 0$$

$$(-1)^n D(-1) = (-1)^n D(z)\big|_{z=-1} > 0$$

$$|a_0| < a_n; |b_0| > |b_{n-1}|; |c_0| > |c_{n-2}|; \cdots; |l_0| > |l_3|; |m_0| > |m_2|$$

4.3.2 离散系统稳定性的代数判据

二、朱利(Jury)判据-直接判据



加入了采样开关和保持器后，对开环增益提出更多的限制

$$G_0(z) = Z\left\{\frac{K(1-e^{-Ts})}{s^2(s+1)}\right\} = \frac{K(0.368z+0.264)}{z^2-1.368z+0.368}$$

$$\Phi(z) = \frac{G_0(z)}{1+G_0(z)} = \frac{K(0.368z+0.264)}{z^2+(0.368K-1.368)z+(0.264K+0.368)}$$

$D(z)=z^2+(0.368K-1.368)z+(0.264K+0.368)=0$

$a_2=1$, $a_1=0.368K-1.368$, $a_0=0.264K+0.368$

$$D(1) = D(z)\big|_{z=1} = a_2 + a_1 + a_0 > 0 \qquad 1+(0.386K-1.368)+(0.264K+0.368)>0 \qquad K>0$$

$$(-1)^n D(-1) = (-1)^2 D(z)\big|_{z=-1} = a_2 - a_1 + a_0 > 0 \qquad 1-(0.386K-1.368)+(0.264K+0.368)>0 \qquad K<\frac{2.736}{0.104}=26.31$$

$$|a_0| < a_n \qquad K < \frac{1-0.368}{0.264} = 2.394$$

$$0<K<2.394$$

4.3.2 离散系统稳定性的代数判据

二、朱利(Jury)判据-直接判据

$D(z)=2z^4+7z^3+10z^2+4z+1$ （***2n-3＝5, n+1=5***）

列 / 行	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	**1**	**4**	**10**	**7**	**2**
2	**2**	**7**	**10**	**4**	**1**
3	$\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{vmatrix}=-3$	$\begin{vmatrix}1 & 7\\2 & 4\end{vmatrix}=-10$	$\begin{vmatrix}1 & 10\\2 & 10\end{vmatrix}=-10$	$\begin{vmatrix}1 & 4\\2 & 7\end{vmatrix}=-1$	
4	-1	-10	-10	-3	
5	$\begin{vmatrix}-3 & -1\\-1 & -3\end{vmatrix}=8$	$\begin{vmatrix}-3 & -10\\-1 & -10\end{vmatrix}=20$	$\begin{vmatrix}-3 & -10\\-1 & -10\end{vmatrix}=20$		

$D(1)=D(z)\big|_{z=1}=2+7+10+4+1=24>0;$

$(-1)^n D(-1)=(-1)^4 D(z)\big|_{z=-1}=2-7+10-4+1=2>0$

$n-1=3$ 个约束条件

$|a_0|<a_4 \quad a_0=1, a_4=2,$

$|b_0|>|b_3|; \quad |b_0|=|-3|=3, |b_3|=|-1|=1,$

$|c_0|>|c_2| \quad |c_0|=8, |c_2|=20,$

Discussion time

如何判别一个采用PID控制器的系统稳定性？

非线性系统情况怎么判断？

输入输出稳定性＝BIBO stability，外部稳定物理意义？

Chap 4 控制系统的稳定性分析

4.4　根轨迹图及系统稳定性分析

定性分析LTI极点(稳定性)的方法

代数判据－Routh-Hurwitz判据

反映不稳定闭环极点个数与参数之间关系

时域图形方法－根轨迹(Root Locus)分析方法

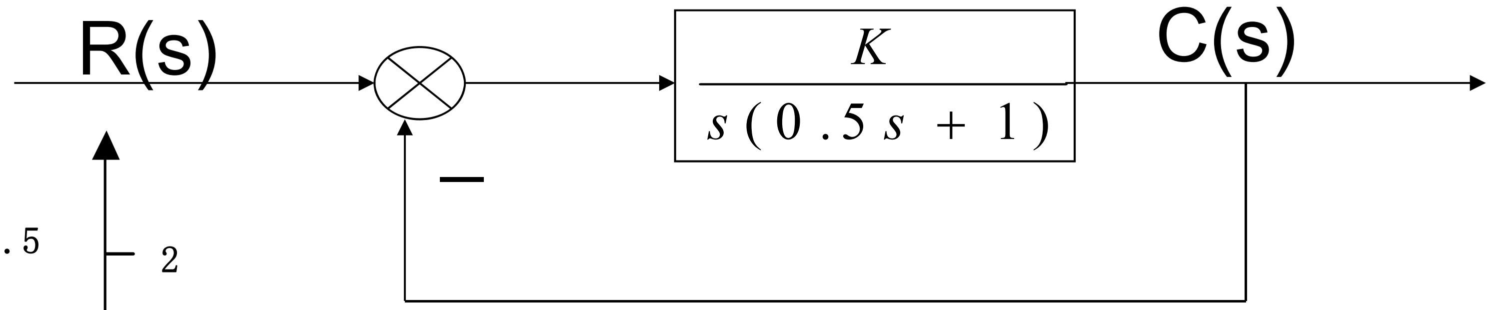
更直观反映闭环极点位置/系统稳定性与参数之间关系

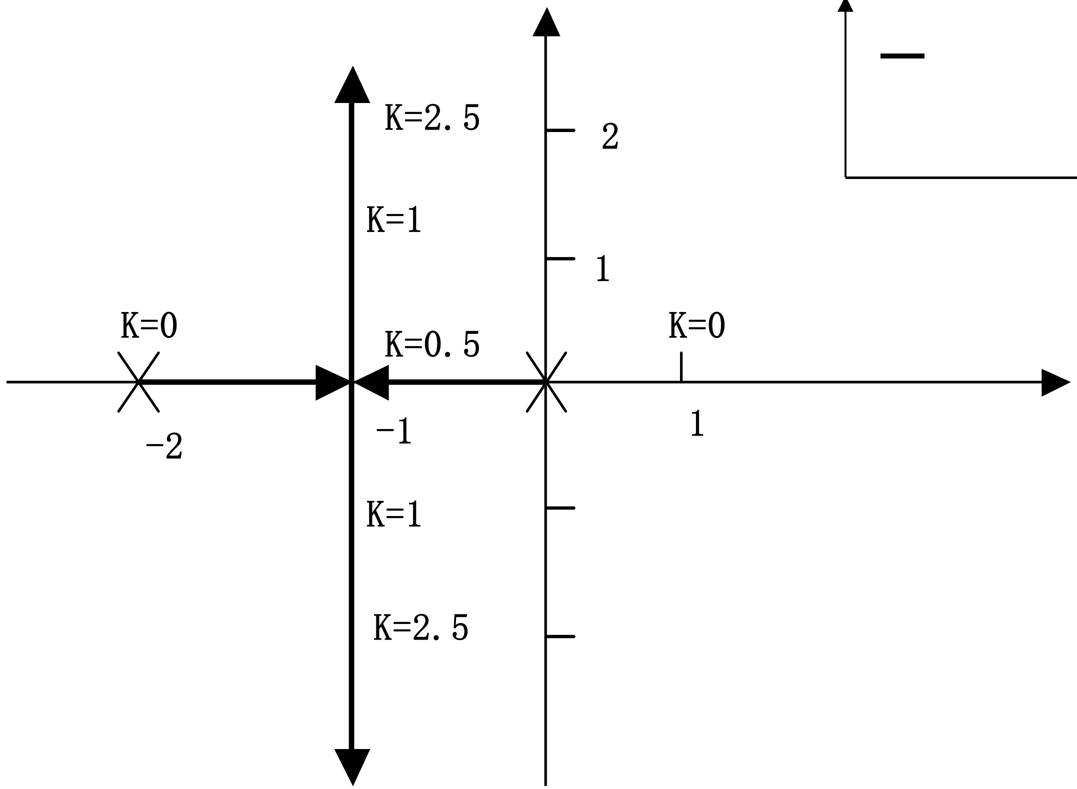
伊文斯（W.R.Evans），1948年

4.4 根轨迹图及系统稳定性分析

4.4.1 基本概念

某个系统参数例如开环增益K:0→∞时闭环极点的变化轨迹



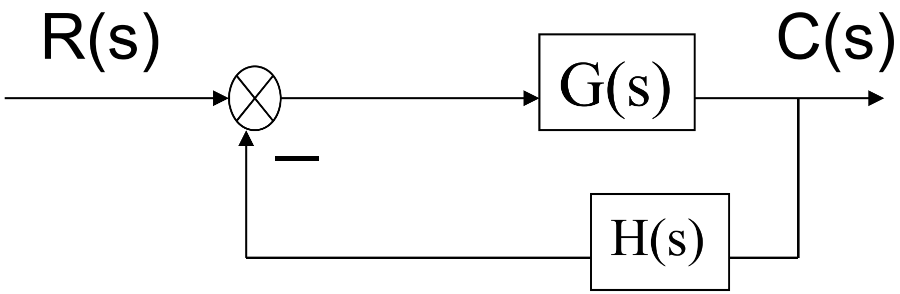


$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2K}{s^2 + 2s + 2K}$$

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 2K}$$

4.4 根轨迹图及系统稳定性分析

4.4.2 幅值条件和幅角条件



$$\frac{K}{T}\frac{1}{s+\frac{1}{T}}\text{与}K\frac{1}{Ts+1}?$$

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{G(s)}{1+G_K(s)}$$

开环传递函数

$$G_K(s)=K_g\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}$$

开环系统的零点

开环系统的极点

根轨迹增益

开环增益

$$K=K_g\frac{\prod_{j=1}^{m}z_i}{\prod_{j=1}^{n}p_j}$$

不计零值极点和零点

4.4.2　幅值条件和幅角条件

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{G(s)}{1+G_K(s)}$$ → 闭环极点方程 $1+G_K(s)=0$

??

$$G_K(s)=-1 \qquad K_g\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{m}(s+p_j)}=-1$$

幅值条件(用处？)

$$|G_K(s)|=1$$

$$\left|K_g\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}\right|=K_g\frac{\prod_{i=1}^{m}|s+z_i|}{\prod_{j=1}^{n}|s+p_j|}=1$$

幅角条件(充要条件!)

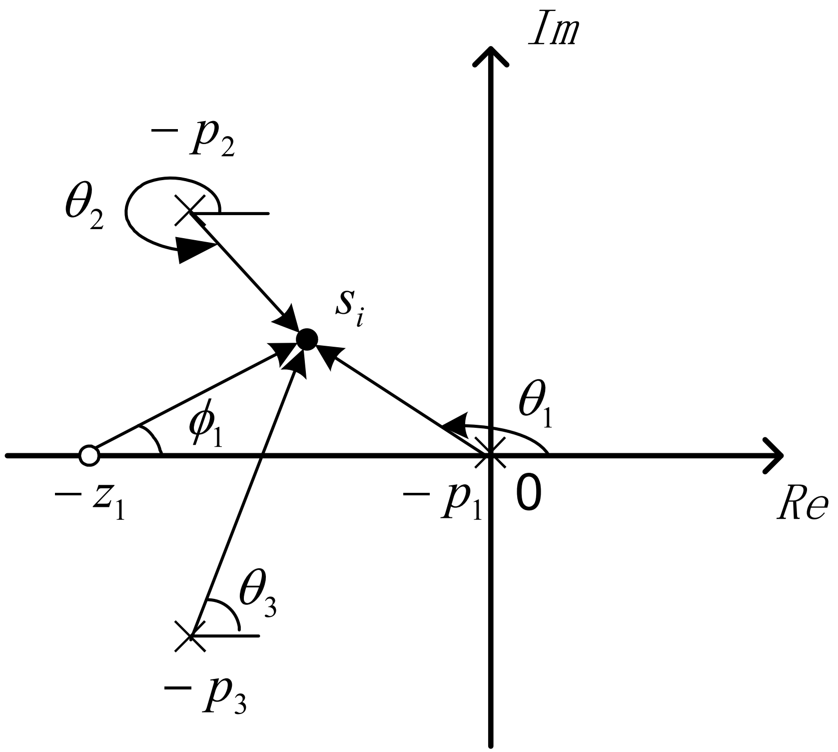
$$\angle G_K(s)=\pm180^\circ(2k+1),\quad k=0,1,2,\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{m}\angle(s+z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s+p_j)=\pm180^\circ(2k+1),$$

$$k=0,1,2,\cdots$$

4.4.2　幅值条件和幅角条件

$$G(s)H(s)=\frac{K_g(s+z_1)}{s(s+p_2)(s+p_3)}$$



$$\begin{aligned}&\angle\overline{-z_1s_i}-(\angle\overline{-p_1s_i}+\angle\overline{-p_2s_i}+\angle\overline{-p_3s_i})\\&=\phi_1-(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\\&=\pm180^\circ(2k+1),\qquad k=0,1,2,\cdots\end{aligned}$$

$$K_{g_i}=\frac{\left|\overline{-p_1s_i}\right|\cdot\left|\overline{-p_2s_i}\right|\cdot\left|\overline{-p_3s_i}\right|}{\left|\overline{-z_1s_i}\right|}$$

4.4 根轨迹图及系统稳定性分析

4.4.3 绘制根轨迹的基本法则

$$G_K(s) = K_g \frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}$$

1. 根轨迹的起点和终点

$$\prod_{i=1}^{n}(s+p_j)+K_g\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)=0$$

$$\frac{1}{K_g}\prod_{i=1}^{n}(s+p_j)+\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)=0$$

$$G_K(s)\to K_g\left(\frac{1}{s}\right)^{n-m}\to 0$$

$$(s\to\infty)$$

起点为n个开环极点，终点为m个开环零点和n-m个*无穷远处零点*。

2. 根轨迹的分支数--n条分支

3. 轨迹的对称性

4.4.3　绘制根轨迹的基本法则

4. 根轨迹的渐近线(n>m)

$$\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}=\frac{s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}=-\frac{1}{K_g}$$

$$b_{m-1}=\sum_{i=1}^{m}z_i,\quad a_{n-1}=\sum_{j=1}^{n}p_j$$

$$s^{m-n}+(b_{m-1}-a_{n-1})s^{m-n-1}=-\frac{1}{K_g}$$

$$s^{m-n}(1+\frac{b_{m-1}-a_{n-1}}{s})=-\frac{1}{K_g}$$

$$s(1+\frac{b_{m-1}-a_{n-1}}{s})^{\frac{1}{m-n}}=(-\frac{1}{K_g})^{\frac{1}{m-n}}$$

$$s(1+\frac{1}{m-n}\frac{b_{m-1}-a_{n-1}}{s})=(-\frac{1}{K_g})^{\frac{1}{m-n}}$$

$$s=-\sigma+(-K_g)^{\frac{1}{n-m}}$$

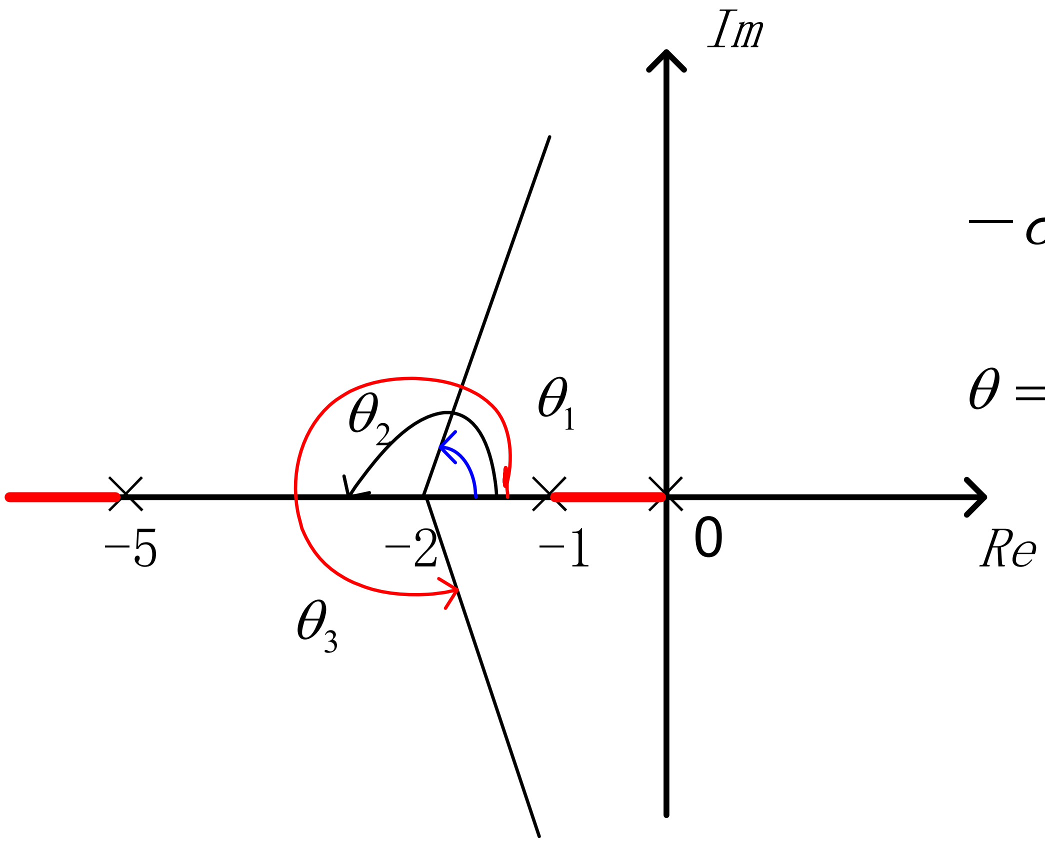
$$-\sigma=\frac{\sum_{j=1}^{n}-p_j-\sum_{i=1}^{m}-z_i}{n-m}$$

$$s=-\sigma+K_g^{\frac{1}{n-m}}\cdot e^{j180^\circ\frac{2k+1}{n-m}}$$

$$\theta=\frac{180^\circ(2k+1)}{n-m}$$

$$k=0,1,2,\cdots,n-m-1$$

4.4.3　绘制根轨迹的基本法则



$$G_k(s)=\frac{K_g}{s(s+1)(s+5)}$$

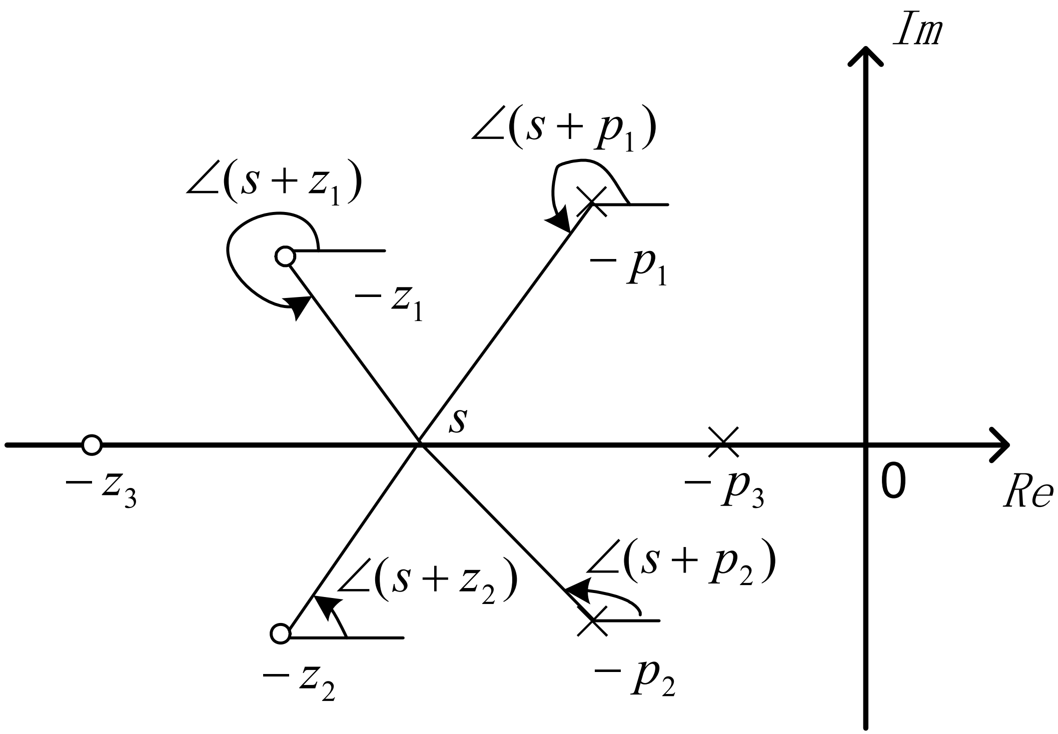
$$-\sigma=\frac{\sum_{j=1}^{3}-p_j}{n-m}=\frac{0+(-1)+(-5)}{3-0}=-2$$

$$\theta=\frac{180^\circ(2k+1)}{n-m}=\frac{180^\circ(2k+1)}{3}$$

4.4.3　绘制根轨迹的基本法则

5. 实轴上的根轨迹

实轴上的任意点，只要在它右方的开环零、极点数目的总和为奇数，则该点必为根轨迹上的点。

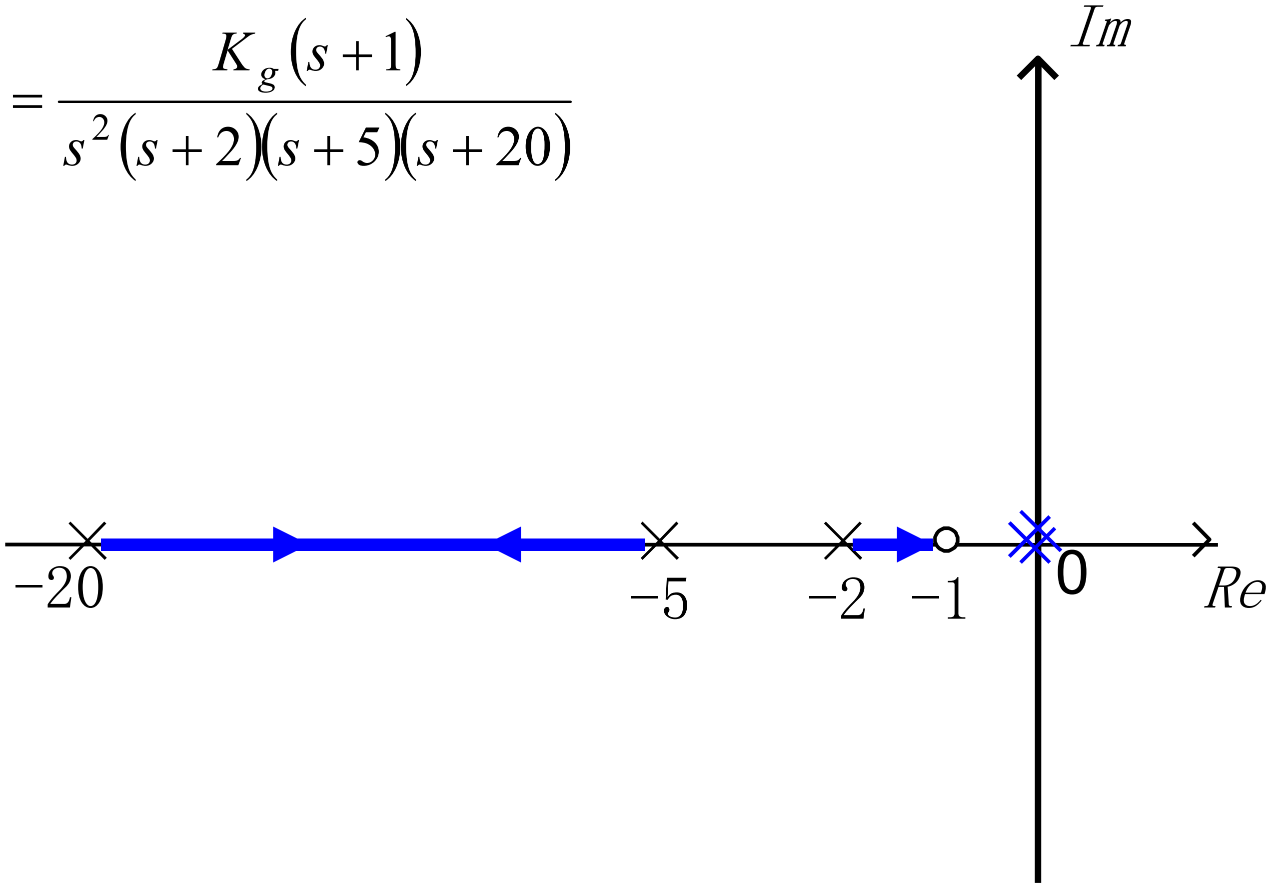


相角条件

4.4.3　绘制根轨迹的基本法则

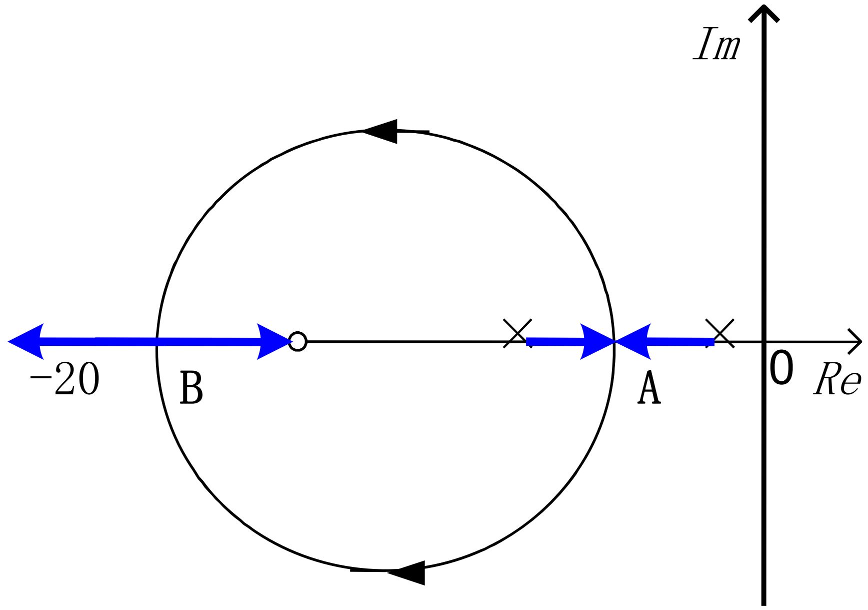
5. 实轴上的根轨迹

$$G_k(s)=\frac{K_g(s+1)}{s^2(s+2)(s+5)(s+20)}$$



4.4.3　绘制根轨迹的基本法则

6．实轴上根轨迹的分离点和汇合点



存在情况

分离(汇合)角＝180/k

分离(汇合)点位置

(1) 重根法　(2) 幅角法

(自学！)

$$G_k(s)=K_g\frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\boxed{\begin{aligned}D(s)+K_gN(s)=0\\D'(s)+K_gN'(s)=0\end{aligned}}$$

$$N(s)D'(s)-N'(s)D(s)=0$$

$$-\sigma_d \quad K_{gd}$$

4.4.3　绘制根轨迹的基本法则

6．实轴上根轨迹的分离点和汇合点 $G_k(s)=\dfrac{K_g(s+1)}{(s+0.1)(s+0.5)}$

$$N'(s)D(s)-N(s)D'(s)=0$$

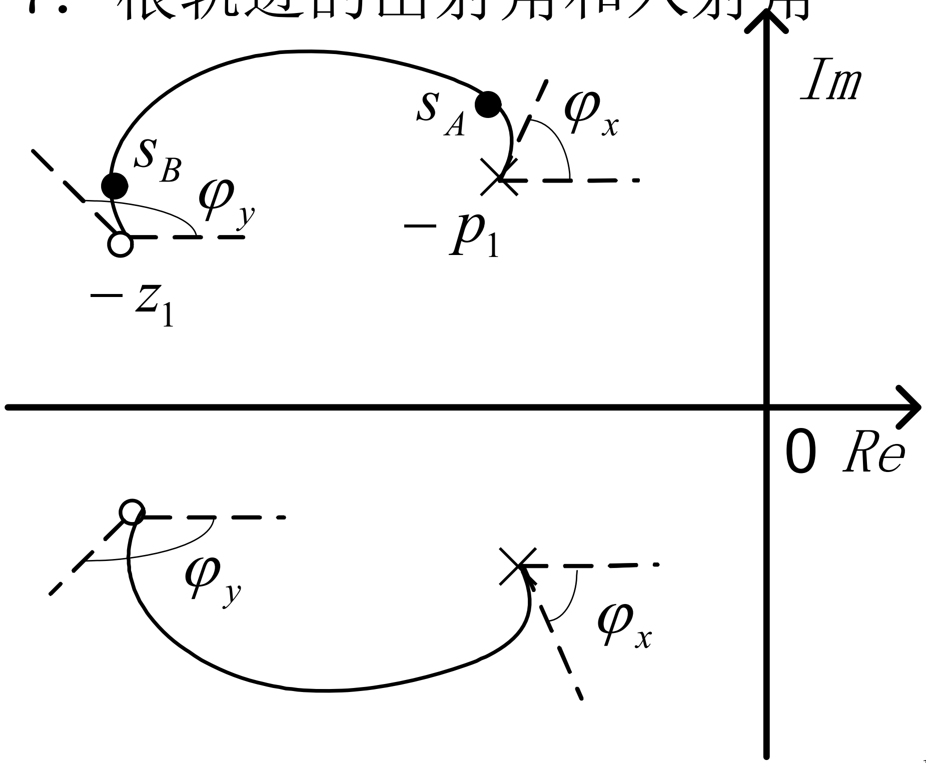
$$s^2+0.6s+0.05-(s+1)(2s+0.6)=0$$
$$s^2+2s+0.55=0$$

$$s_{1,2}=-1\pm 0.67=-1.67,-0.33$$

K_{gd1}=0.06，K_{gd2}=2.6

4.4.3 绘制根轨迹的基本法则

7. 根轨迹的出射角和入射角



$$\sum_{i=1}^{m}\angle(S_A+z_i)-\angle(S_A+p_1)-\sum_{j=2}^{n}\angle(S_A+p_j)$$
$$=\pm180^\circ(2k+1)$$

$$S_A \to -p_1$$

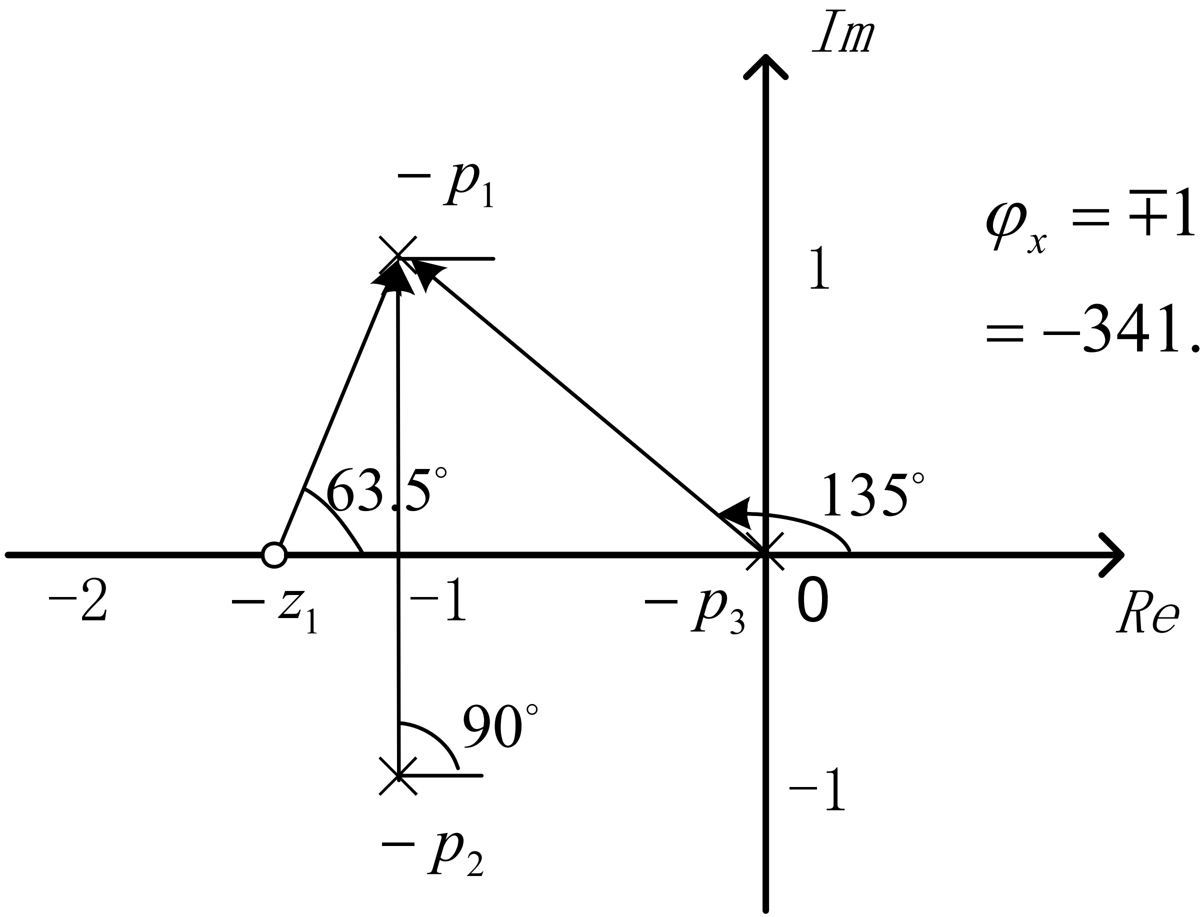
$$\sum_{i=1}^{m}\angle(-p_1+z_i)-\angle(S_A+p_1)-\sum_{j=2}^{n}\angle(-p_1+p_j)$$
$$=\pm180^\circ(2k+1)$$

$$\angle(S_A+p_1)=\varphi_x=\mp180^\circ(2k+1)+\sum_{i=1}^{m}\angle(-p_1+z_i)-\sum_{j=2}^{n}\angle(-p_1+p_j)$$

$$\angle(S_B+z_1)=\varphi_y=\pm180^\circ(2k+1)+\sum_{j=1}^{n}\angle(-z_1+p_j)-\sum_{i=2}^{m}\angle(-z_1+z_i)$$

4.4.3 绘制根轨迹的基本法则

7．根轨迹的出射角和入射角



$$\varphi_x = \mp 180^\circ + 63.5^\circ - 135^\circ - 90^\circ$$

$$= -341.5^\circ = 18.5^\circ$$

4.4.3　绘制根轨迹的基本法则

8. 根轨迹和虚轴的交点及临界根轨迹增益值

对应的根轨迹增益K_g称为临界根轨迹增益，用K_{gp}表示。

对应的开环增益K称为临界开环增益，用K_p表示。

求法(1)：由劳斯判据求得交点坐标值以及相应的K_g

求法(2)：在特征方程H(s)=0中令s=jω，然后使特征方程的实部和虚部分别为零求得。

4.4.3　绘制根轨迹的基本法则

8. 根轨迹和虚轴的交点及临界根轨迹增益值

$$G_k(s)=\frac{K_g}{s(s+1)(s+2)}$$

$$s^3+3s^2+2s+K_g=0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K_{gp} \\ s^1 & \dfrac{6-K_{gp}}{3} & 0 \\ s^0 & K_{gp} & \end{array}$$

$$K_{gp}-3\omega^2=0$$

$$2\omega-\omega^3=0$$

若存在交点，有全零行

$\pm j\sqrt{2}$，$K_{gp}=6$

$$K_p=K_{gp}\cdot\frac{1}{p_1p_2}=6\times\frac{1}{1\times2}=3$$

4.4.3 绘制根轨迹的基本法则

9. 闭环系统极点之和与闭环系统极点之积

$$G_k(s)=K_g\frac{s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

$$b_{m-1}=\sum_{i=1}^{m}z_i,\quad b_0=\prod_{i=1}^{m}z_i$$

$$a_{n-1}=\sum_{j=1}^{n}p_j,\quad a_0=\prod_{j=1}^{n}p_i$$

$$s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots a_1s+a_0+K_g(s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0)=0$$

$$(s+s_1)(s+s_2)\cdots(s+s_n)=s^n+(s_1+s_2+\cdots+s_n)s^{n-1}+\cdots+s_1s_2\cdots s_n$$

(1) n-m>=2时闭环系统极点之和等于开环系统极点之和且为常数

$$\sum_{j=1}^{n}-s_j=\sum_{j=1}^{n}-p_j=-a_{n-1}$$

$$j\sqrt{2}-j\sqrt{2}+(-s_3)=0+(-1)+(-2)=-3$$

$$-j\sqrt{2}+j\sqrt{2}+s_3=0+1+2=3$$

$$(s+3)$$

4.4.3　绘制根轨迹的基本法则

9. 闭环系统极点之和与闭环系统极点之积

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots a_1 s + a_0 + K_g(s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) = 0$$

(2) 闭环系统极点之积和开环系统零、极点之间关系

$$\prod_{j=1}^{n} s_j = \prod_{j=1}^{n} p_j + K_g \prod_{i=1}^{m} z_i$$

当开环系统具有等于零的极点时, I型以上系统

$$\prod_{j=1}^{n} s_j = K_g \prod_{i=1}^{m} z_i$$

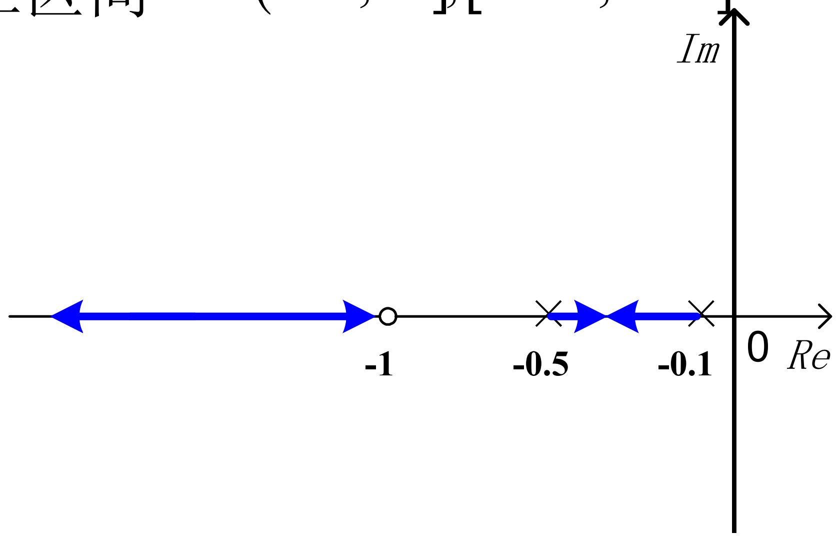
Chap 4 控制系统的稳定性分析

4.4.4 根轨迹图的绘制及系统稳定性分析

$$G_k(s) = \frac{K_g(s+1)}{(s+0.1)(s+0.5)}$$

1．根轨迹共有两支，起点在开环数点s=－0.1, －0.5，一支根轨迹的终点在s=－1，另一支沿负实轴趋于无穷远处

2．实轴上的根轨迹在区间　$(-\infty,-1]$, $[-0.5,-0.1]$



4.4.4　根轨迹图的绘制及系统稳定性分析

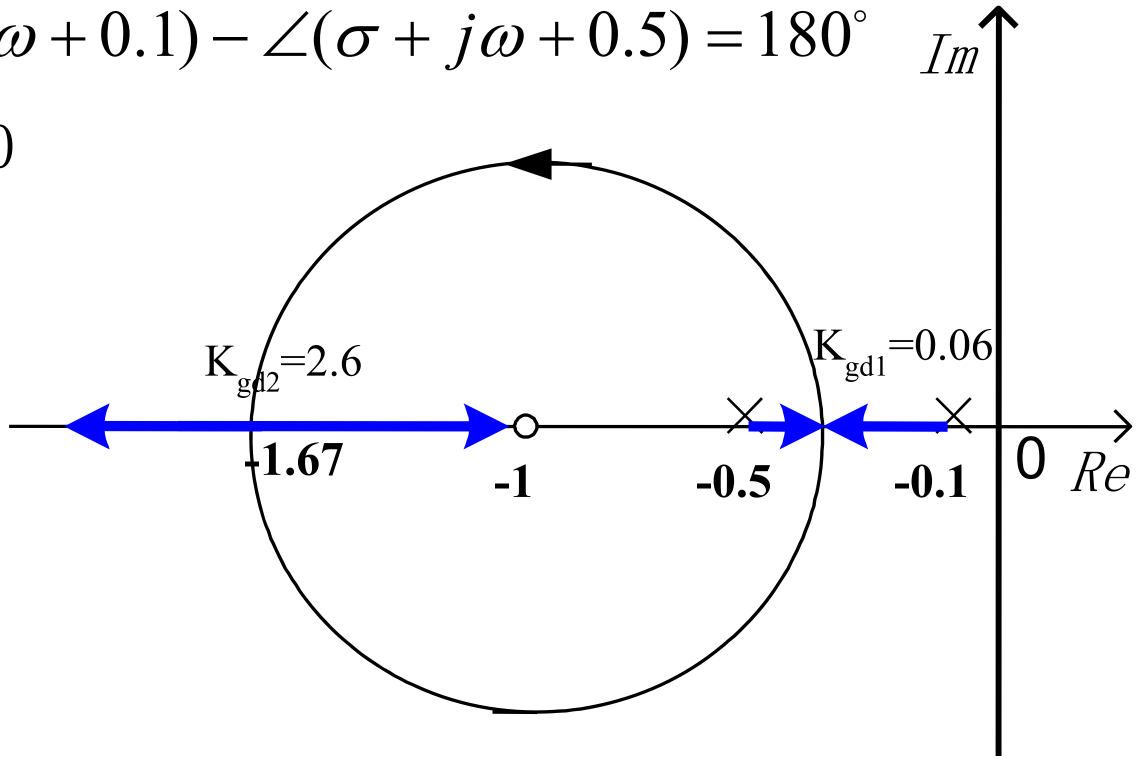
3．根轨迹在实轴上的分离点和汇合点

$-\sigma_{d1}=-0.33$，$K_{gd1}=0.06$，　$-\sigma_{d2}=-1.67$, $K_{gd2}=2.6$

4．在复平面上系统的根轨迹是圆　$(\sigma+1)^2+\omega^2=0.67^2$

$$\angle(\sigma+j\omega+1)-\angle(\sigma+j\omega+0.1)-\angle(\sigma+j\omega+0.5)=180^\circ$$

5．系统稳定范围：Kg>0



4.4.4　根轨迹图的绘制及系统稳定性分析

$$G_k(s)=\frac{K_g(s+2)}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$

1.根轨迹共有四支。起点在开环极点0，－3，-1±j，一支根轨迹的终点在开环零点－2，其余三支终点在无穷远处。

2．趋于无穷远处的根轨迹的渐近线

$$-\sigma=\frac{1}{n-m}\left(\sum_{j=1}^{n}-p_j-\sum_{i=1}^{m}-z_i\right)=\frac{1}{3}[(-1+j-1-j-0-3)-(-2)]=-1$$

$$\theta=\frac{180^\circ(2k+1)}{n-m}=\frac{180^\circ(2k+1)}{3}$$　　60°，180°，300°

3．实轴上的根轨迹为 $(-\infty,-3]$和$[-2,0]$

4．实轴上无分离点和汇合点。

4.4.4 根轨迹图的绘制及系统稳定性分析

5．根轨迹离开复数极点-1+j的出射角为 $\qquad G_k(s)=\dfrac{K_g(s+2)}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$

$$\begin{aligned}\varphi_x &= \mp 180^\circ(2k+1)+\angle(-p_1+z_1)-\angle(-p_1+p_2)-\angle(-p_1+p_3)+\angle(-p_1+p_4)\\ &= \mp 180^\circ(2k+1)+45^\circ-(90^\circ+135^\circ+26.6^\circ)\\ &= \mp 180^\circ\times 2k-26.6^\circ\end{aligned}$$

6. 计算根轨迹与虚轴的交点 $\qquad s(s+3)(s^2+2s+2)+K_g(s+2)=0$

$$\begin{array}{l|ccc} s^4 & 1 & 8 & 2K_g \\ s^3 & 5 & 6+K_g & \\ s^2 & \dfrac{40-(6+K_g)}{5} & 2K_g & \\ s^1 & 6+K_g-\dfrac{50K_g}{34-K_g} & & \\ s^0 & 2K_g & & \end{array}$$

$K_g>0$

$K_g<34$

$6+K_g-\dfrac{50K_g}{34-K_g}>0 \Rightarrow K_g<5\sqrt{13}-11\approx 7$

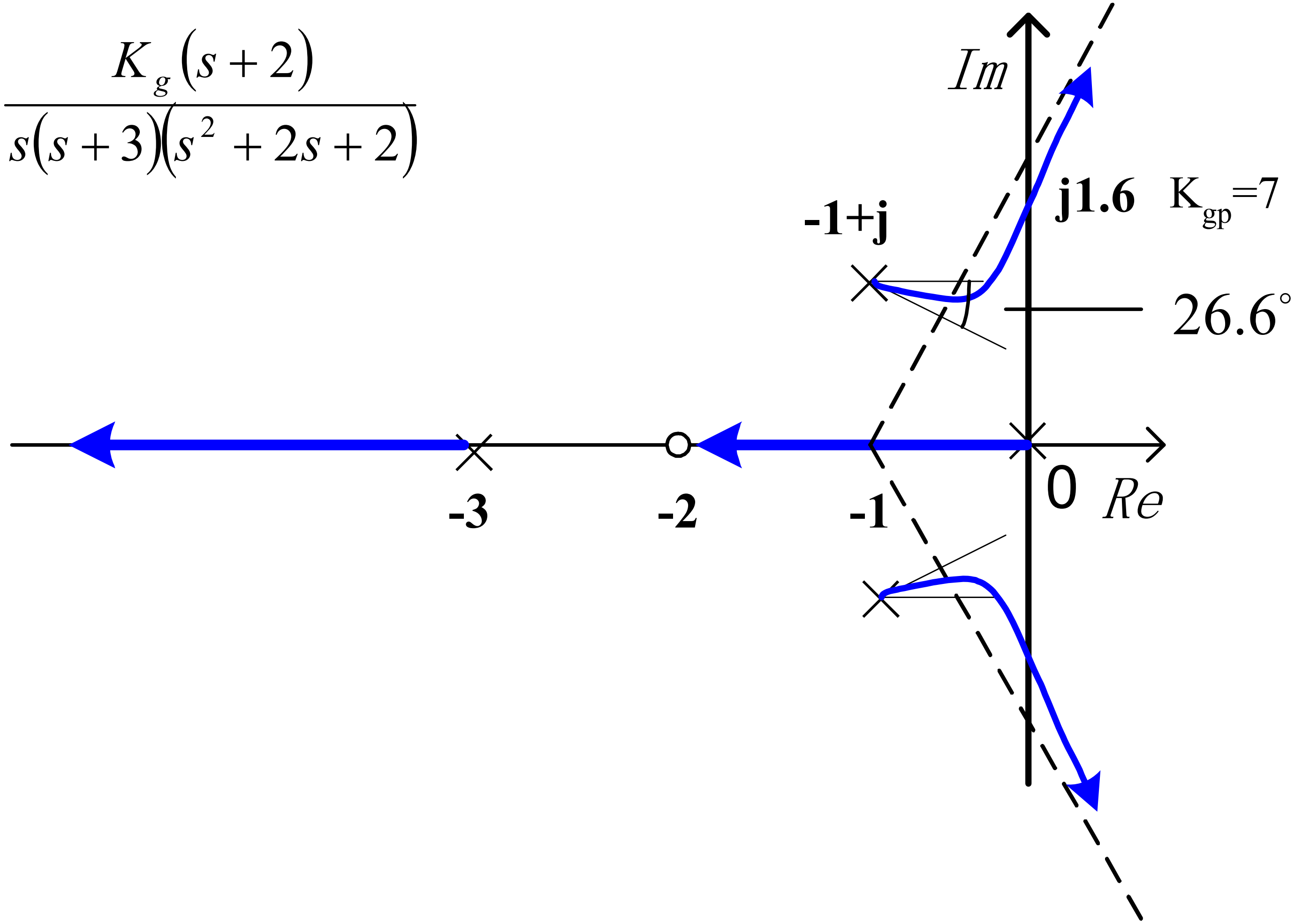
$$6+K_g-\frac{50K_g}{34-K_g}=0 \qquad K_{gp}\approx 7.0$$

$$K_p\approx 7\times\frac{2}{(1+j)(1-j)\times 3}=\frac{7}{3} \qquad \omega=\pm 1.6$$

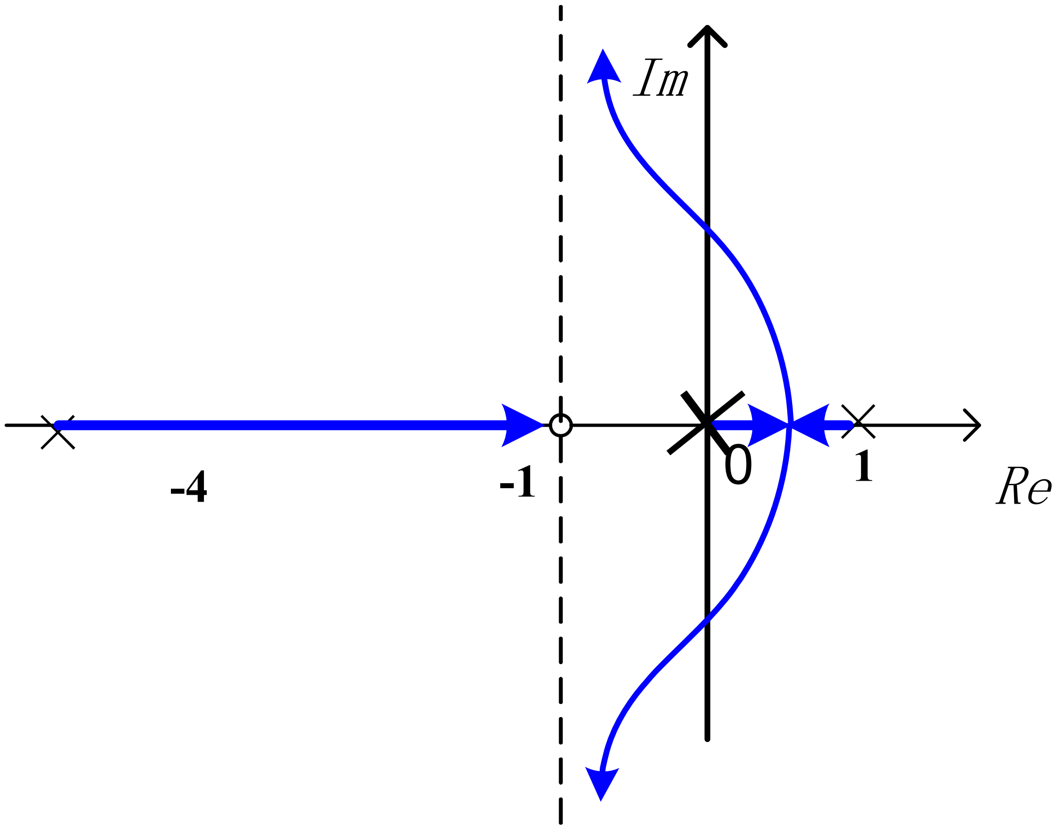
4.4.4 根轨迹图的绘制及系统稳定性分析

6. 当$0<K_g<7.0$时（开环增益$0<K<7/3$）系统是稳定的

$$G_k(s)=\frac{K_g(s+2)}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$



4.4.4 根轨迹图的绘制及系统稳定性分析



草图

$$G_k(S)=\frac{K_g(s+1)}{s(s-1)(s+4)}$$

$$-\sigma=\frac{1}{3-1}[0+1+(-4)-(-1)]$$
$$=-1\neq 1$$

Discussions

阶数差3阶以上的系统？

非最小相位系统(开环不稳定，开环稳定)？

最小相位系统？

Considerations for control?

Question

Q1:

反馈闭环系统，

已知开环传递函数为：$G_k(s)=K/(S^3+10s^2+Ks)$，

系统的根轨迹怎么画？

P 171 例 4.28:开环传递函数为:

$G_k(s)=10(Ts+1)/(s^2+2s)$，

系统的根轨迹怎么画？

Chap 4 控制系统的稳定性分析

4.5 奈奎斯特(Nyquist)稳定性判据

定性分析LTI极点(稳定性)的方法

- 代数判据－Routh-Hurwitz判据

  反映不稳定闭环极点个数与参数之间关系
- 时域图形方法－根轨迹(Root Locus)分析方法

  直观反映闭环极点位置/系统稳定性与参数之间关系
- 频域图形方法－Nyquist稳定性判据

  直观反映闭环系统稳定性与参数之间关系

  甚至不需知道开环传递函数

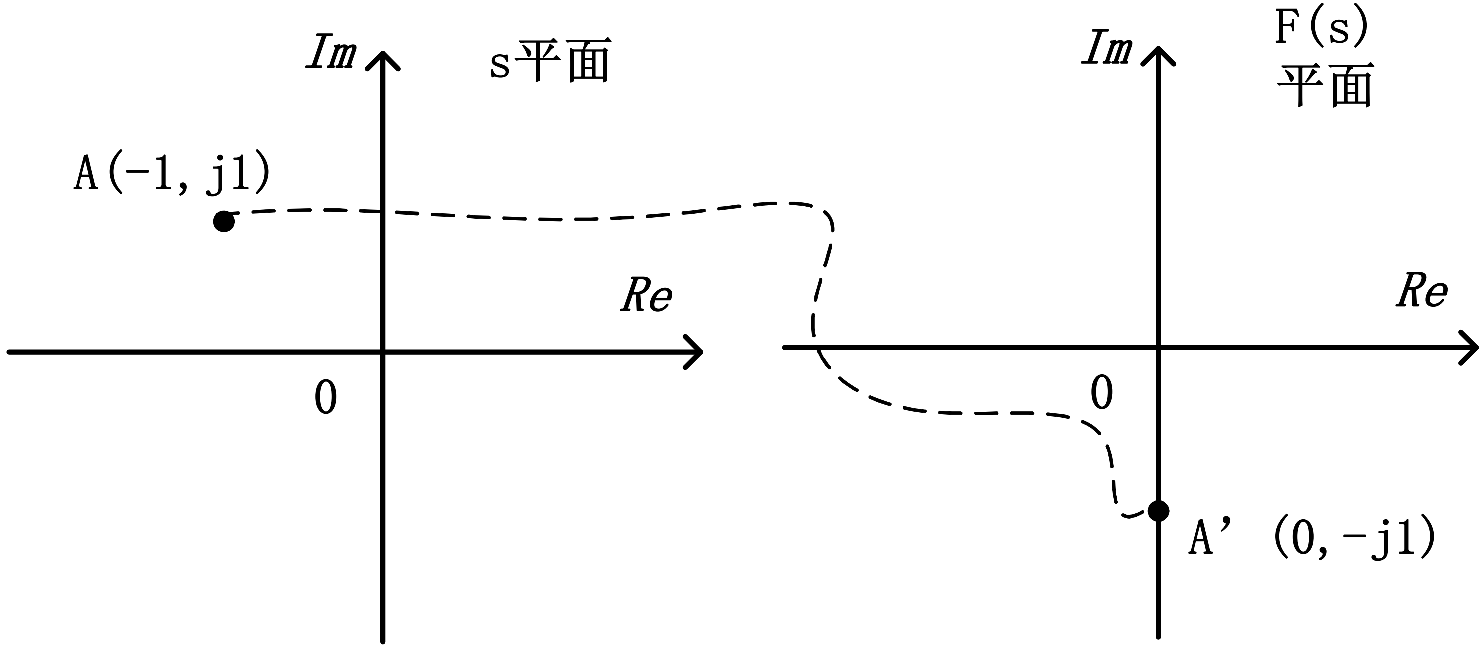
  （H. Nyquist），1932年

4.5 奈奎斯特(Nyquist)稳定性判据

4.5.1 幅角定理

柯西（Cauchy）幅角原理/围线性质

$$F(s)=1+\frac{2}{s} \qquad F(s)=1+\frac{2\sigma}{\sigma^2+\omega^2}-j(\frac{2\omega}{\sigma^2+\omega^2})$$



4.5.1 幅角定理

Case 1: 只包围极点

$$F(s)=\frac{s+2}{s}$$

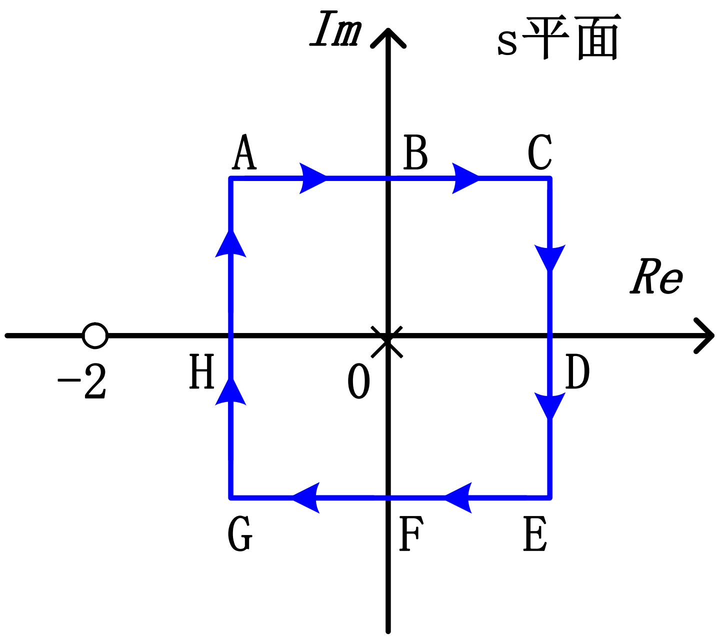
$S_A=-1+j1$ $\quad F(S_A)=0-j1$

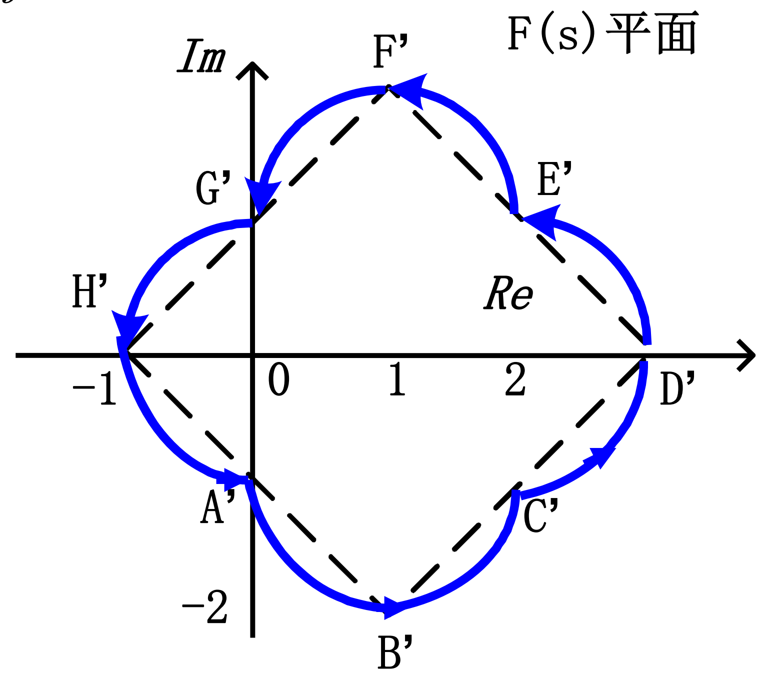
$S_C=+1+j1$ $\quad F(S_C)=2-j1$

$S_E=+1-j1$ $\quad F(S_E)=2+j1$

$S_G=-1-j1$ $\quad F(S_G)=0+j1$

$$F(s)=1+\frac{2\sigma}{\sigma^2+\omega^2}-j(\frac{2\omega}{\sigma^2+\omega^2})$$

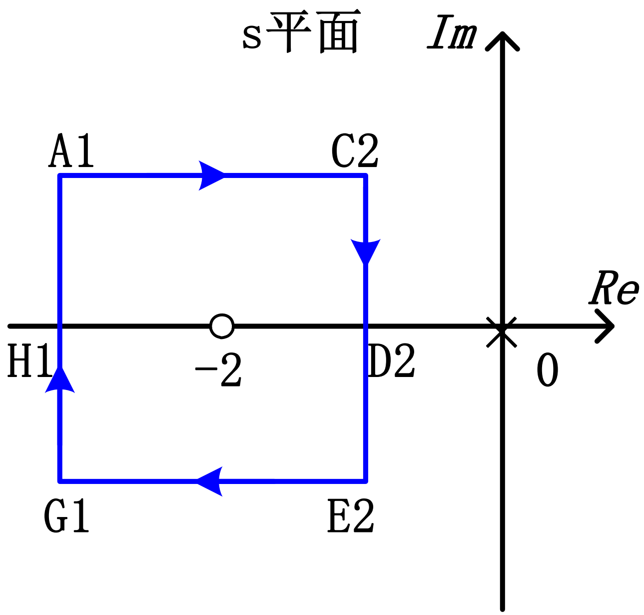


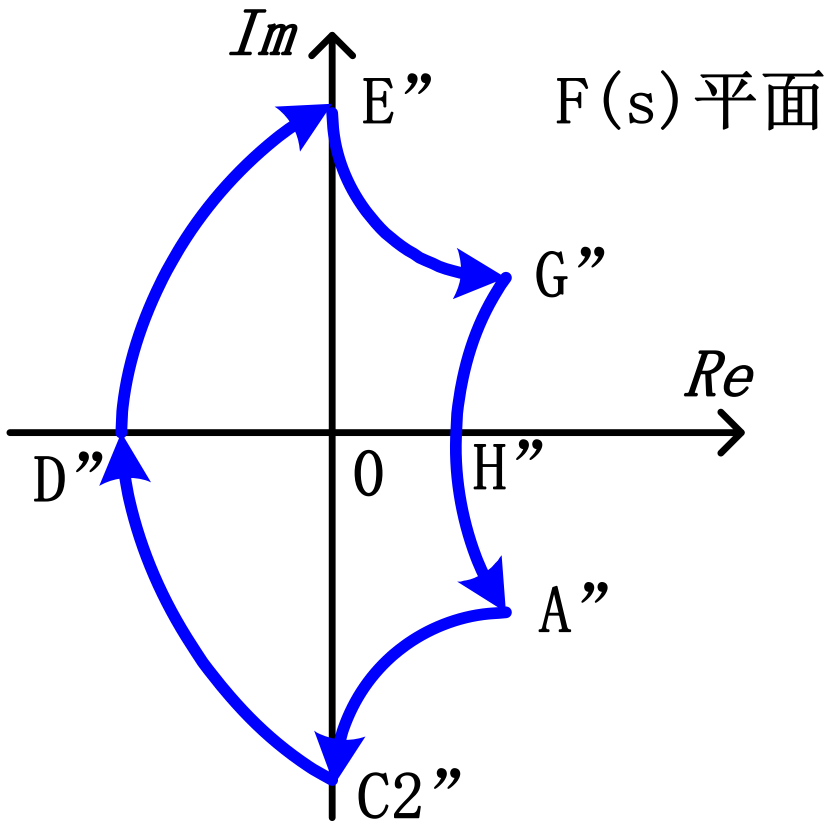


4.5.1 幅角定理

Case 2: 只包围零点

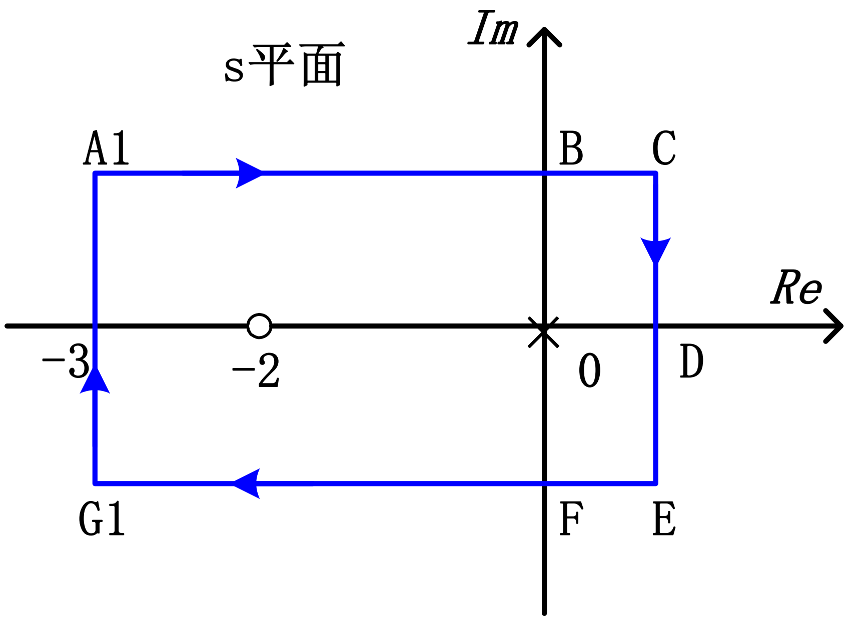
$$F(s)=\frac{s+2}{s}$$

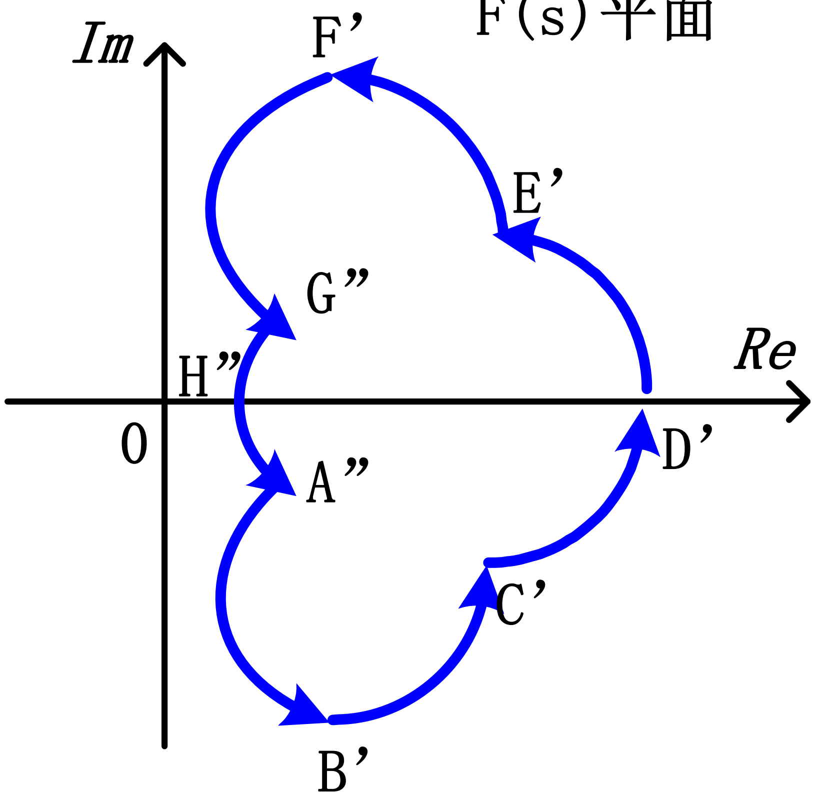




4.5.1　幅角定理

Case 3: *包围极零点*　$F(s)=\dfrac{s+2}{s}$





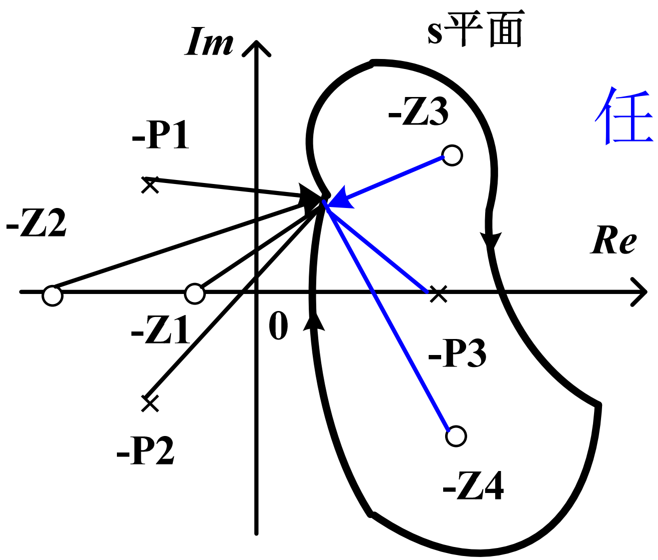
4.5.1 幅角定理

WHY?

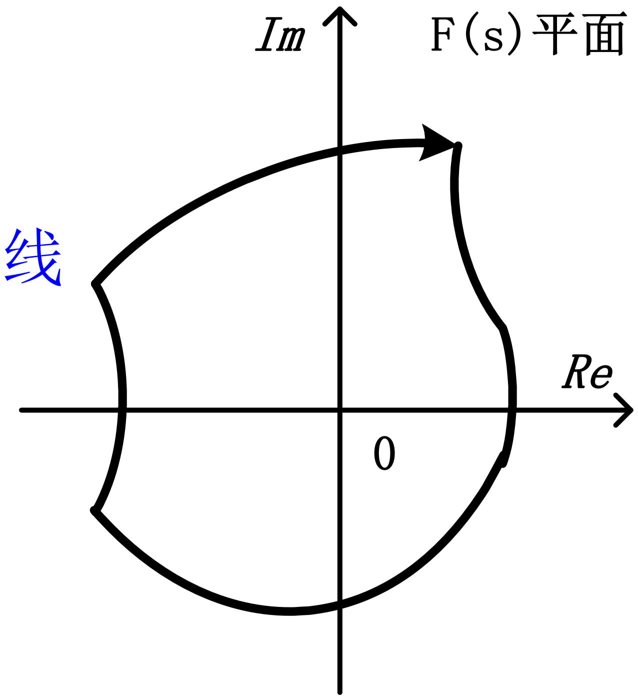
$$F(s)=\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}$$

Cauchy幅角原理/围线性质:

$$\angle F(s)=\sum_{i=1}^{m}\angle(s+z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s+p_j)$$

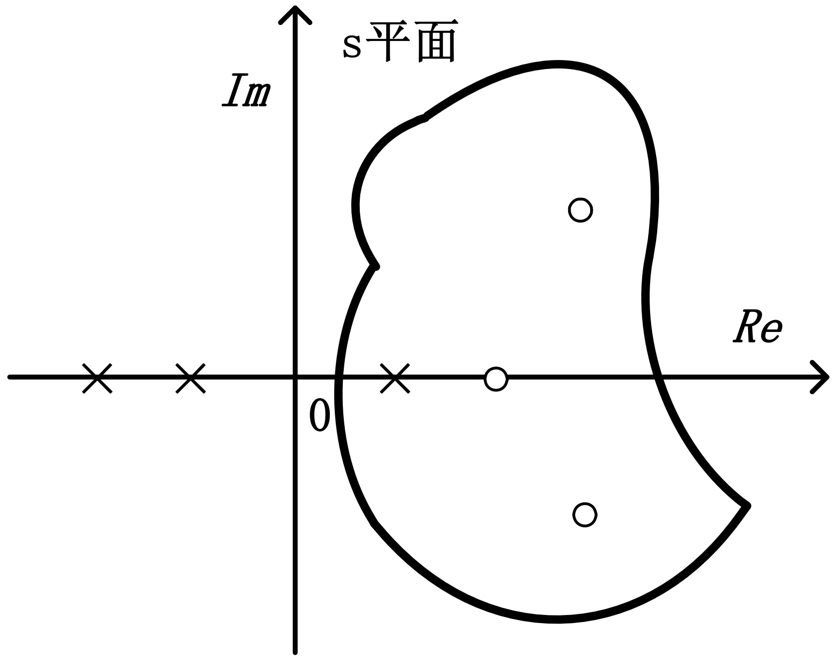


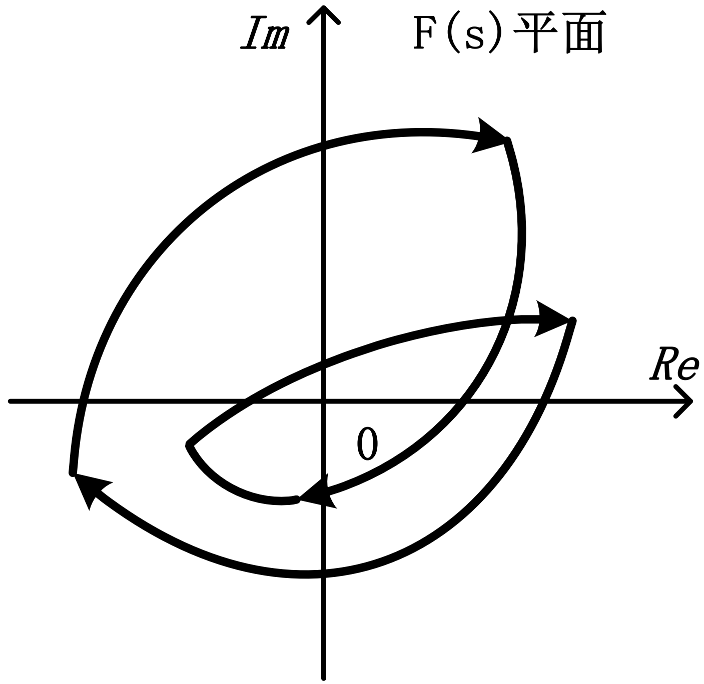
任何封闭曲线



N=围线内零点数－极点数=2-1=1　　　相角变化＝-360°

4.5.1 幅角定理





N=围线内零点数－极点数=3-1=2　　*相角变化＝-360°×2*

4.5.1 幅角定理

Assumption 1: F(s)在Γ上及Γ内除有限个数的极点外是处处解析的

Assumption 2: F(s)在Γ上既无极点也无零点

则当围线Γ走向为顺时针时，有

$$N=Z-P$$

其中，Z为F(s)在Γ内的零点个数；

P为F(s)在Γ内的极点个数；

N为映射围线包围F(s)原点的圈数/次数，

以顺时针为正，逆时针为负。

4.5.2　奈奎斯特稳定性判据

如何利用Cauchy幅角原理/围线性质 ？

找封闭曲线Γ 包围S右半平面

函数F(s)零点对应系统闭环极点

函数F(s)极点对应系统开环极点

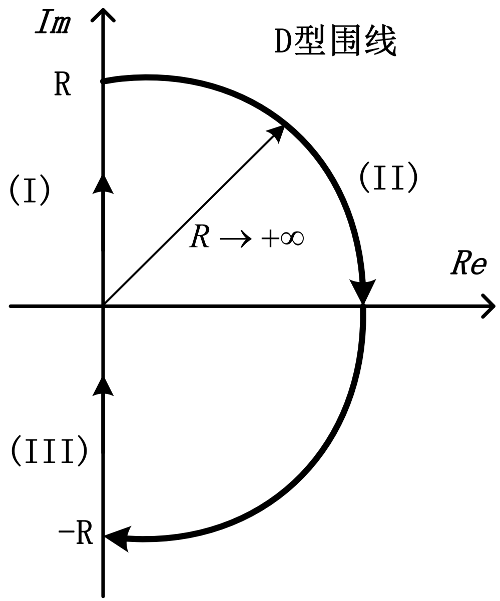
F(s)顺时针变化圈数N

=不稳定闭环极点数Z －不稳定开环极点数P

➔不稳定闭环极点数Z＝不稳定开环极点数P ＋ F(s)顺时针变化圈数N >0?=0?

4.5.2　奈奎斯特稳定性判据

- D型围线:第 I 段一正虚轴s=jω(ω:0→∞);
  第II 段-半径无限大的右半圆$s=Re^{j\theta}$, R=∞, θ:π/2→-π/2
  第III段-负虚轴s=jω(ω:一∞→0)



- F(s)=[A(s)+B(s)]/A(s) 满足解析条件

$$G_K(s)=G(s)H(s)=\frac{B(s)}{A(s)}\quad \Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G_k(s)}=\frac{G(s)A(s)}{A(s)+B(s)}$$

$$F(s)=\frac{A(s)+B(s)}{A(s)}=1+G_K(s)$$

- 假定F(s)在虚轴上没有零、极点（否则...)

- F(s)绕原点的次数=G_k(s)绕(-1, j0)点的次数

Nyquist图　??? 第II段

4.5.2　奈奎斯特稳定性判据

Nyquist判据：

若系统开环传递函数在右半S平面上有P个极点，且Nyquist曲线对(-1, j0)点的包围次数为N（$N>0$为顺时针，$N<0$为逆时针），

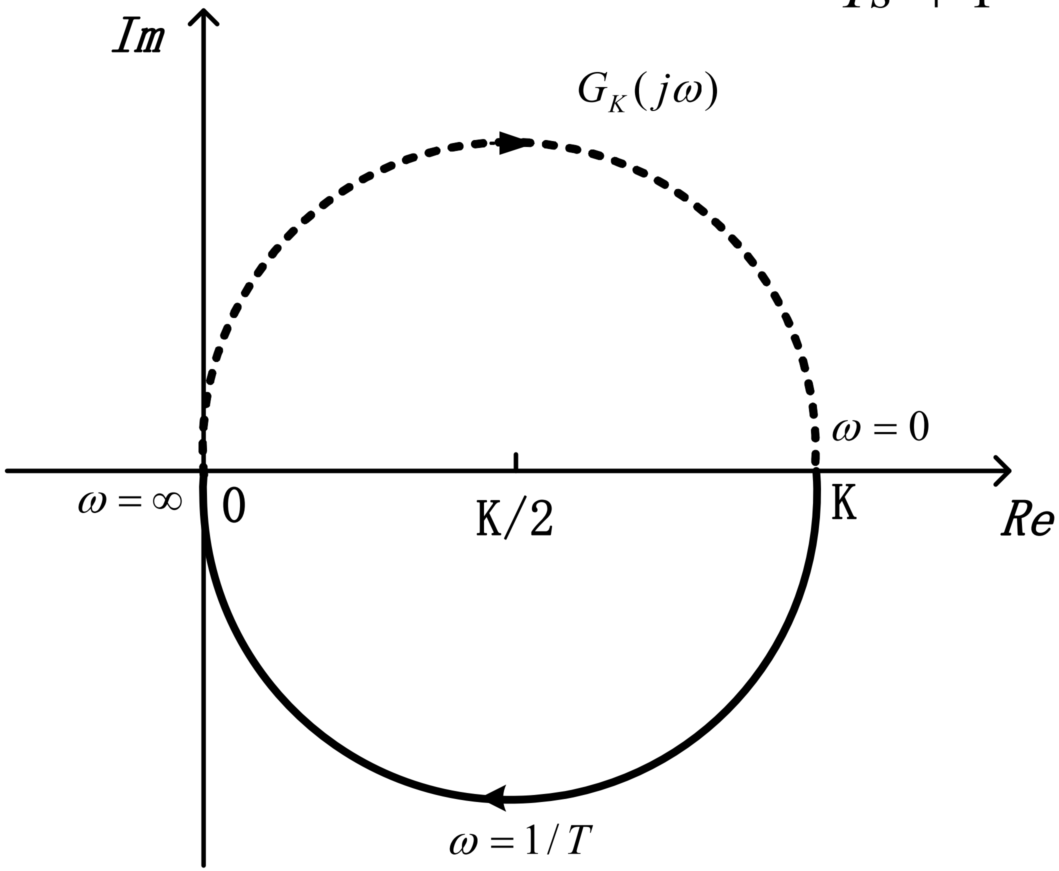
则系统闭环特征方程在右半S平面上根的个数为

$$Z=N+P$$

若Z=0，则系统稳定；否则不稳定。

4.5.2　奈奎斯特稳定性判据

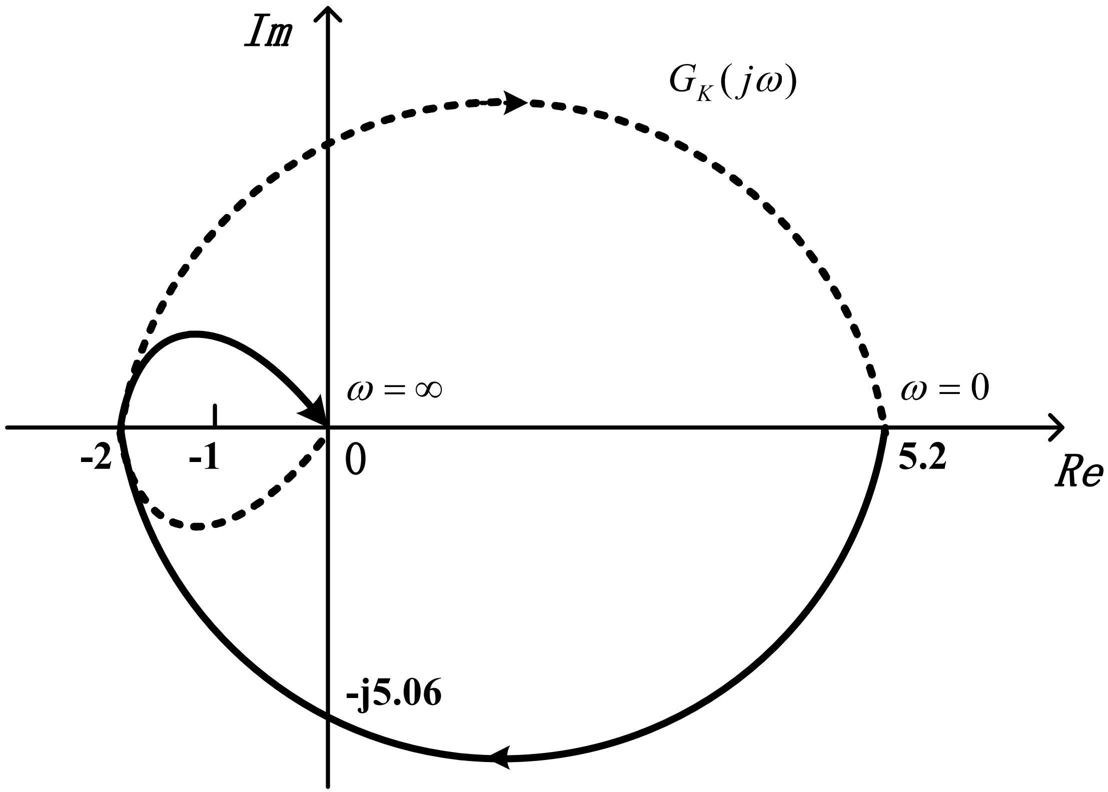
$$G_k(s)=\frac{K}{Ts+1}$$



Z=N+P=0+0=0,
系统稳定。

4.5.2　奈奎斯特稳定性判据

$$G_K(s) = \frac{52}{(s+2)(s^2+2s+5)}$$

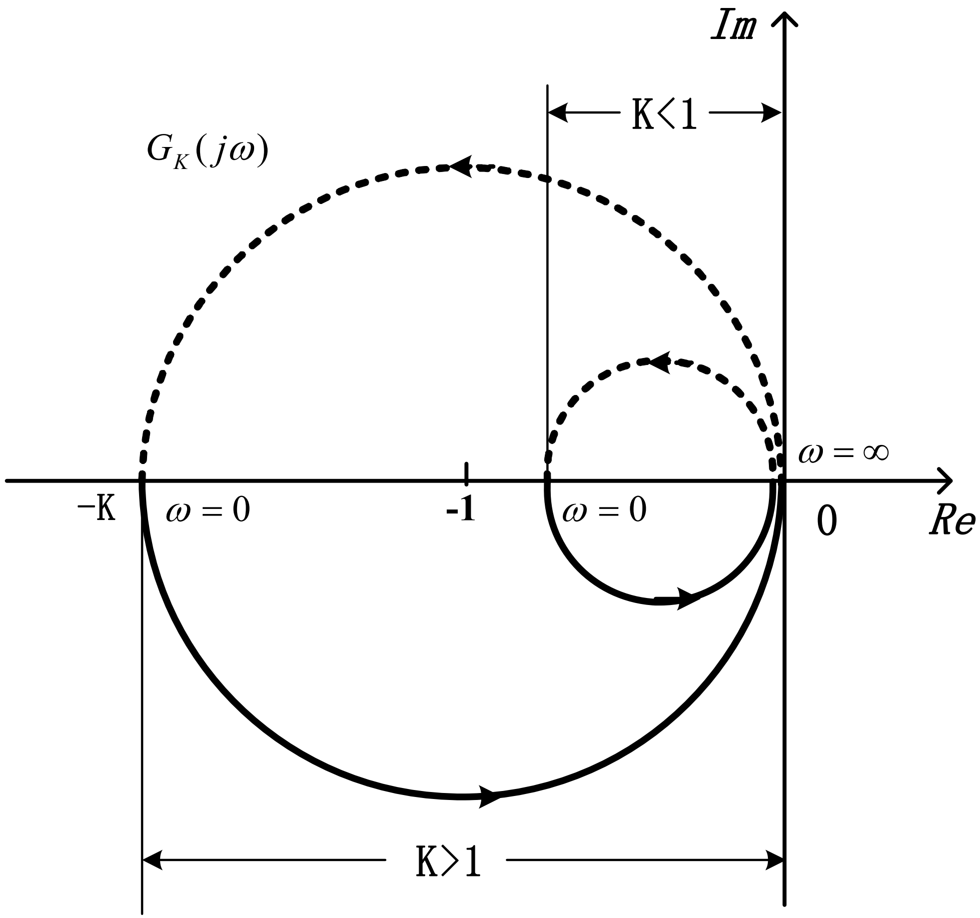


Z=N+P=2+0=2

系统不稳定，有两个右半平面根。

4.5.2　奈奎斯特稳定性判据

$$G_k(s) = \frac{K}{s-1}$$



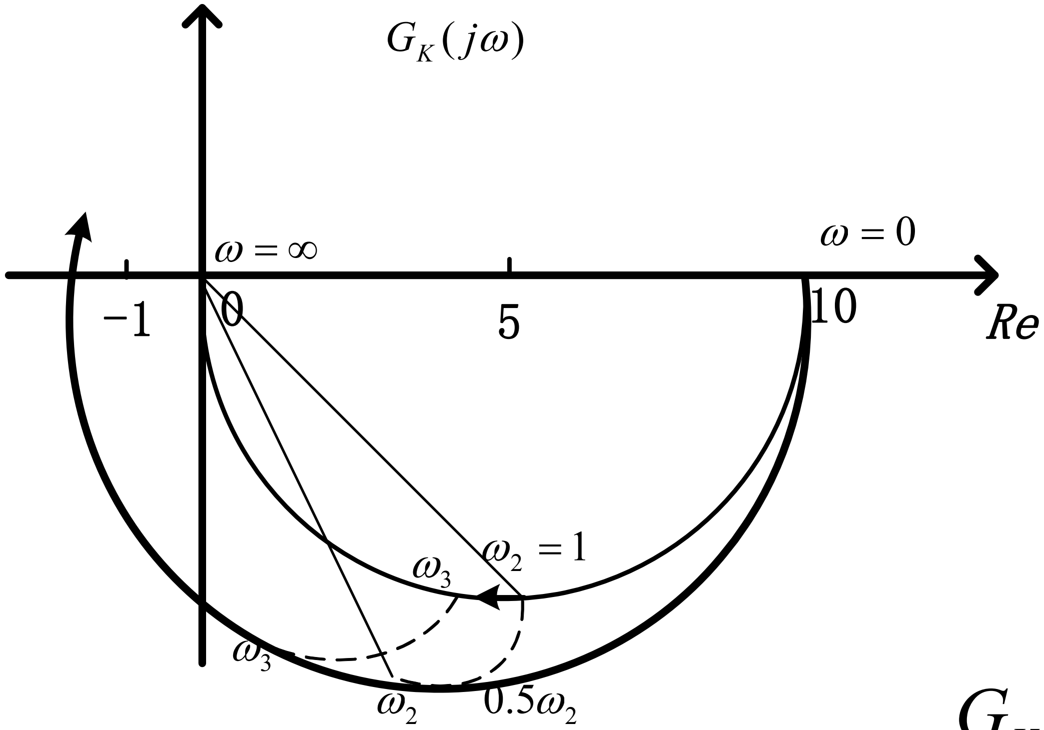
K>1, Z=N+P=−1+1=0,
系统稳定
K<1系统不稳定，
Z=N+P=0+1=1
有1个右半平面根。

K=1 ？

$$S+K-1=0$$

4.5.2　奈奎斯特稳定性判据

$$G_K(s)=\frac{10e^{-0.5s}}{s+1}$$



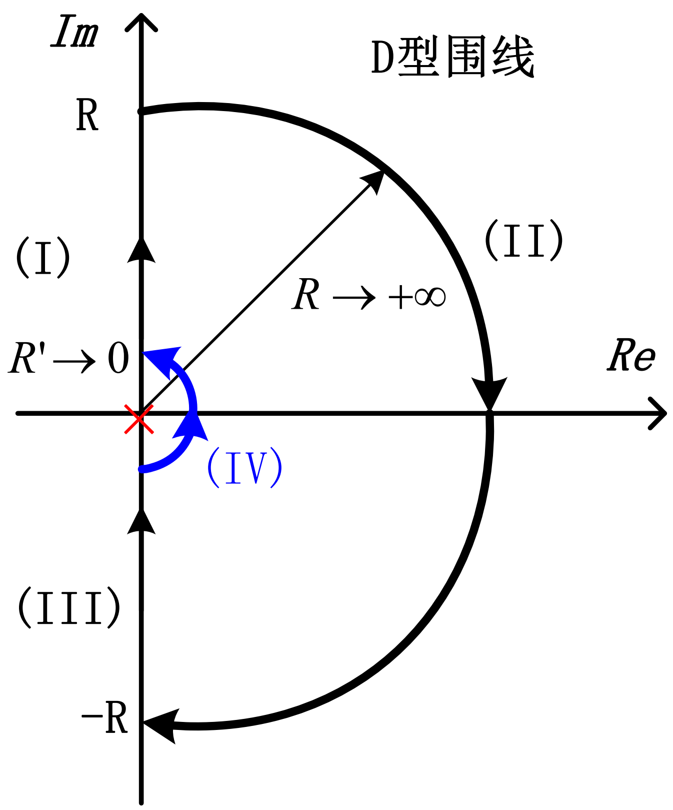
N>0，Z=N+0>0
系统不稳定。

Z=?
系统不稳定根的数目？

$$G_K(j\omega)=\frac{10e^{-j(0.5\omega+\arctan\omega)}}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

4.5.3 开环系统含有积分环节时判据的应用

围线第Ⅳ部分 $s = R'e^{j\theta'}, R' \to 0, \theta' : -\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$



$$G_K(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i s + 1)}{S^{v}\prod_{j=1}^{n-v}(T_j s + 1)} \qquad v \geq 1$$

$$\lim_{\substack{v=1 \\ s\to 0}} G_K(s) = \frac{K}{(R'e^{j\theta'})^{v}} = K_1 e^{j\theta_1}$$

4.5.3　开环系统含有积分环节时判据的应用

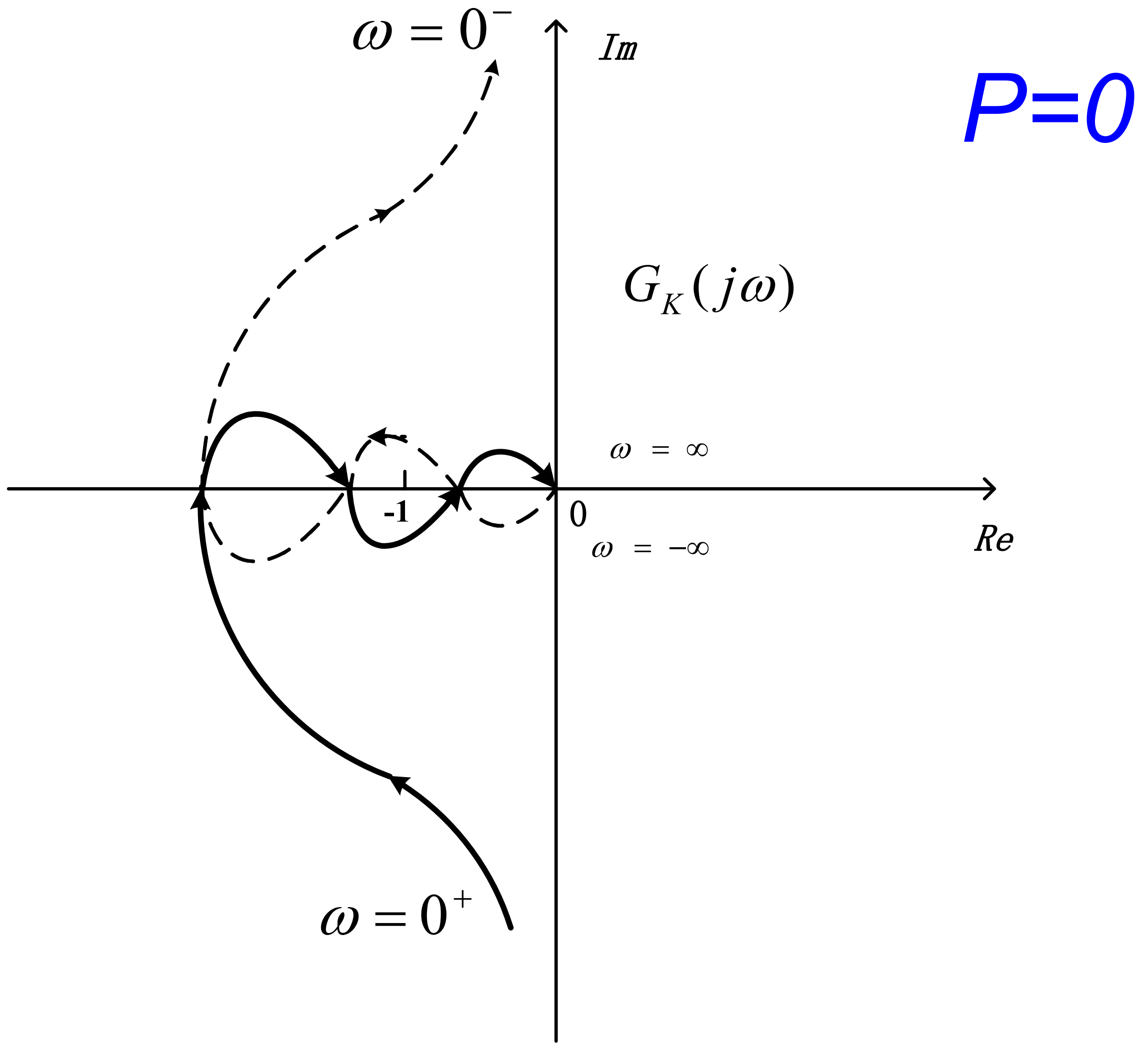
围线第Ⅳ部分 $s = R'e^{j\theta'}, R' \to 0, \theta' : -\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{s\to 0} G_K(s) = \frac{K}{(R'e^{j\theta'})^v} = K_1 e^{j\theta_1}$$

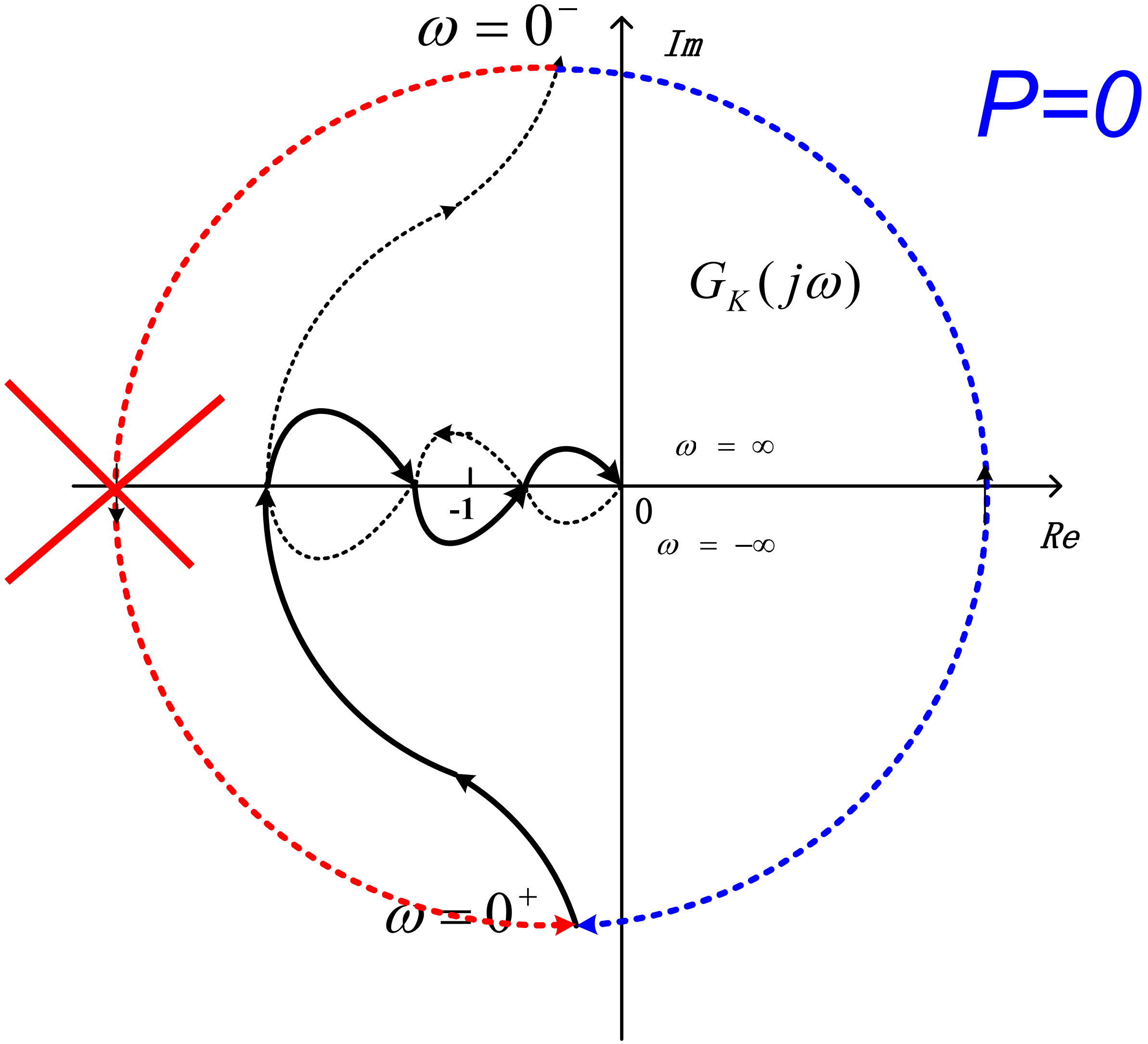
I型系统Nyquist曲线对应修正部分:

$$K_1 \to \infty, \theta_1 : \frac{\pi}{2} \to -\frac{\pi}{2}$$

4.5.3　开环系统含有积分环节时判据的应用



4.5.3 开环系统含有积分环节时判据的应用

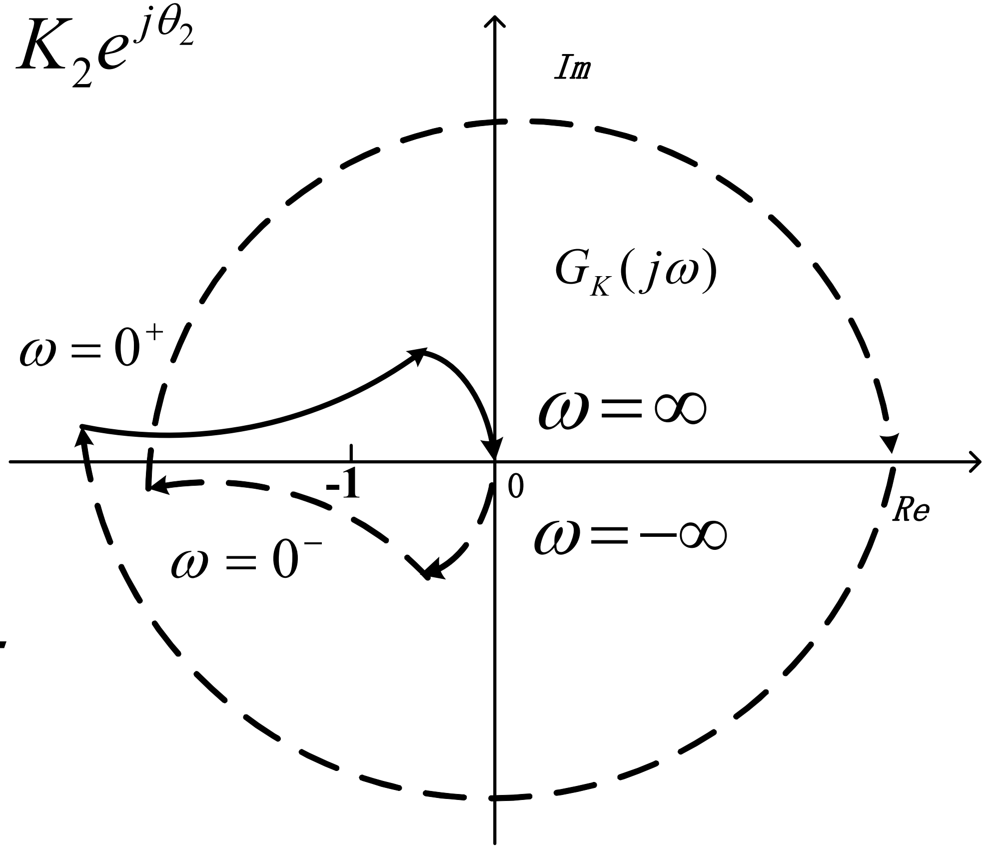


4.5.3　开环系统含有积分环节时判据的应用

围线第Ⅳ部分 $s = R'e^{j\theta'}, R' \to 0, \theta' : -\dfrac{\pi}{2} \to \dfrac{\pi}{2}$

$$\lim_{\substack{v=2 \\ s\to 0}} G_K(s) = \frac{K}{(R'e^{j\theta'})^v} = K_2 e^{j\theta_2}$$

II型系统Nyquist曲线对应修正部分：



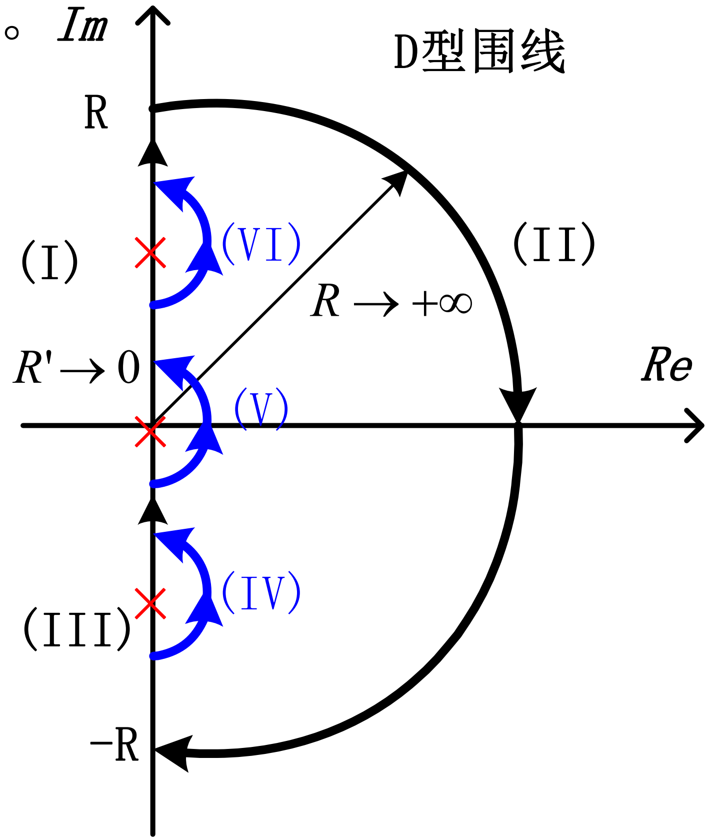
$$K_2 \to \infty, \theta_2 : \pi \to -\pi$$

4.5.3　开环系统含有积分环节时判据的应用

推广：

(1)开环系统在虚轴上有极点或零点。应将奈奎斯特围线在虚轴上的极点处作半径为无穷小的右半圆，使奈奎斯特围线不通过虚轴上的极点但仍包围整个右半S平面。

Nyquist曲线对应修正部分怎么求？



(2)开环频率特性曲线穿过(-1, j0)点。这说明闭环系统临界稳定的。

(3)另一种Nyquist判据形式：

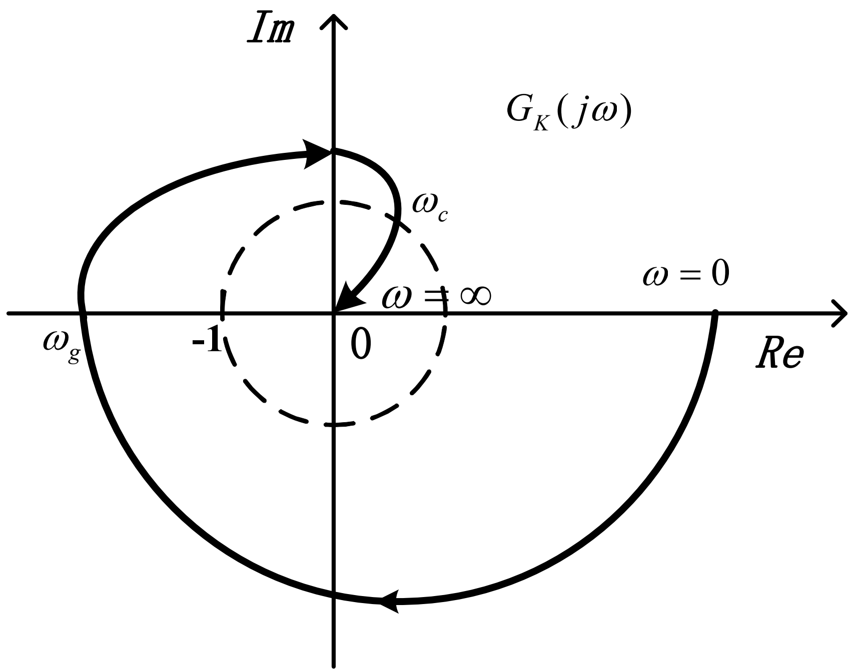
若Nyquist曲线(ω:0→∞部分)对(-1, j0)点的包围次数为N'，则闭环系统在右半S平面上根的个数为 Z=2N'+P

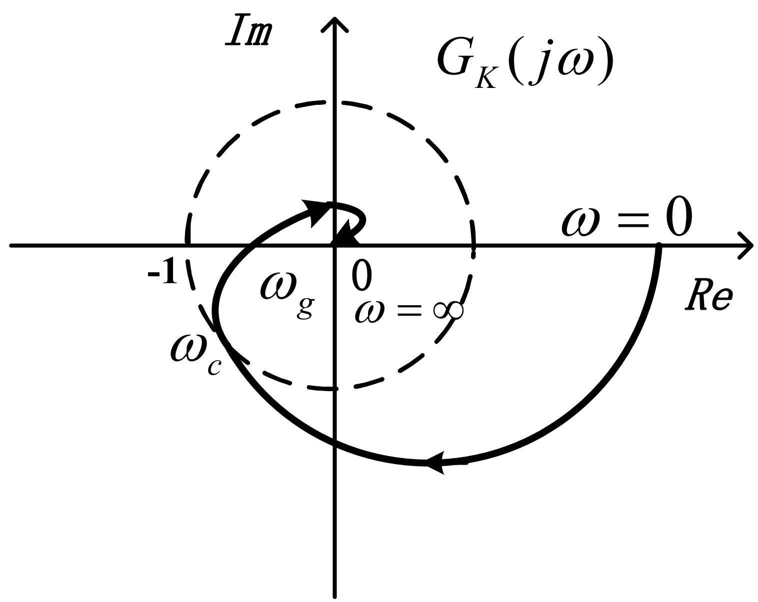
4.5.4 Nyquist判据在Bode图中的表示形式

意义：Bode绘制相对简单，可以将设计和分析问题统一描述

方法：建立两者对应关系

（1）Nyquist图上的单位圆对应于Bode图上的零分贝线；
（2）Nyquist图上的负实轴对应于Bode图上的－180°相位线。

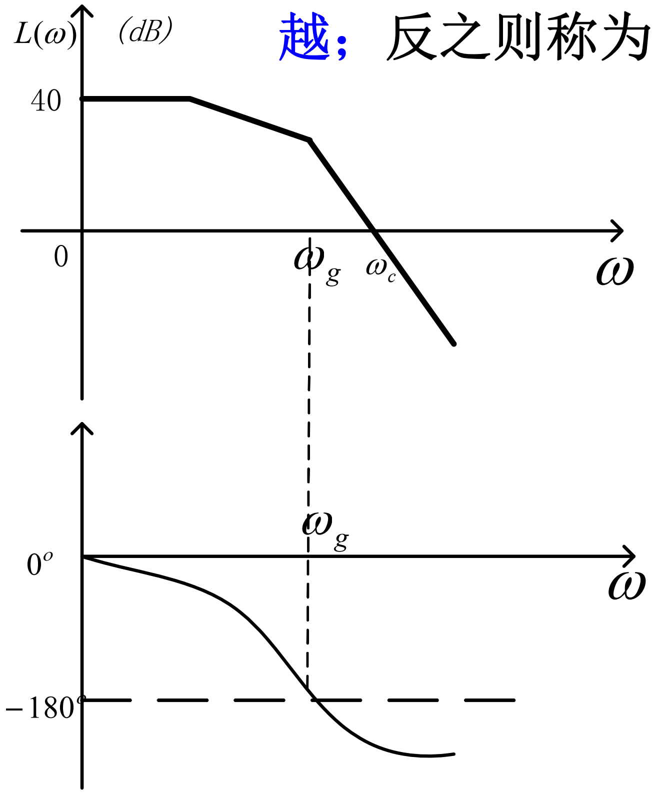


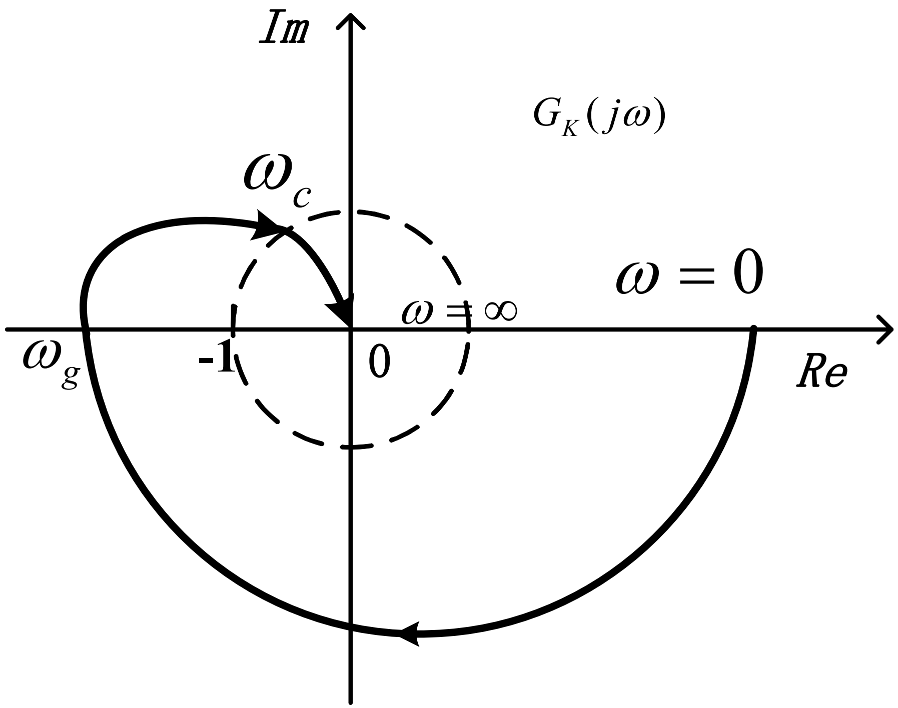


4.5.4　Nyquist判据在Bode图中的表示形式

（3）在 $|G_k(j\omega)|>1$ 的频段内，随着ω的增加，开环频率特性曲线由第三象限经过负实轴进入第二象限（或者相反，由第二象限经负实轴进入第三象限），则表示奈奎斯特图顺时针（或逆时针）包围(-1, j0)点一圈。

在波德图上 L(ω)>0 的频段内，随着ω的增加对数相频特性曲线从大于－180° 区域经－180° 线进入小于－180° 区域，称为负穿越；反之则称为正穿越。





4.5.4 Nyquist判据在Bode图中的表示形式

在波德图上 L(ω)>0 的频段内，随着ω的增加对数相频特性曲线从大于－180° 区域经－180° 线进入小于－180° 区域，称为**负穿越**；反之则称为**正穿越**。

Nyquist判据之Bode版

若系统开环传函在右半S平面上有*P个极点*，*在Bode图上L(ω)>0*的频段内，随着ω的增加相频特性曲线对相位线－180° 的**正、负穿越**次数之差为P/2，则闭环系统稳定；否则，闭环系统不稳定，其在右半S平面上的极点数为

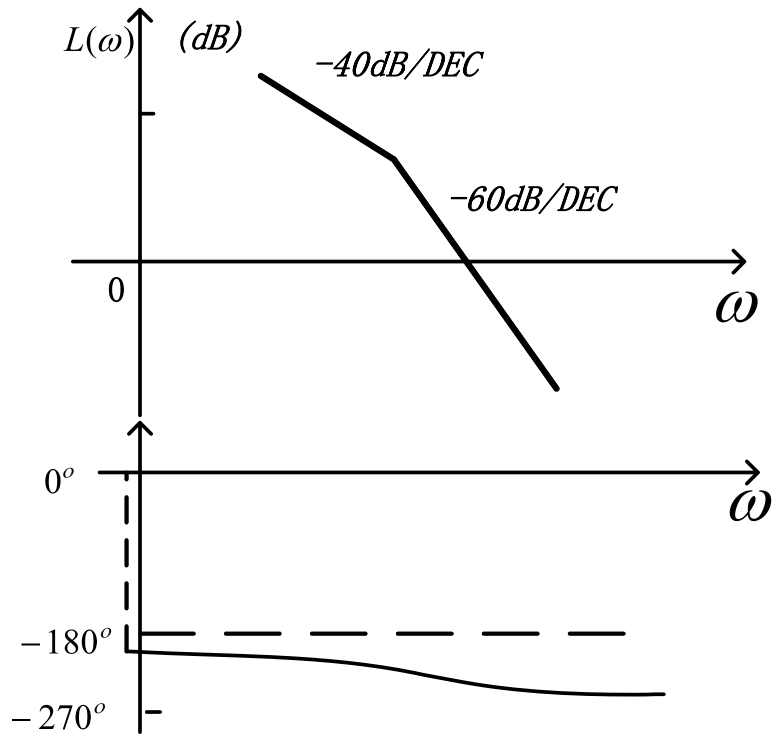
$$Z=2N'+P$$

其中，N'为负穿越次数减去正穿越次数之差。

4.5.4 Nyquist判据在Bode图中的表示形式

开环传函包含积分环节时，在相频曲线$\omega=0^+$的地方补画一条从相角$\varphi(G_k(j0^+))+90° \times v$到$\varphi(G_k(j0^+))$的虚线。将补上的虚线看成对数相频曲线的一部分。

$$G_K(s)=\frac{K}{s^2(Ts+1)}$$

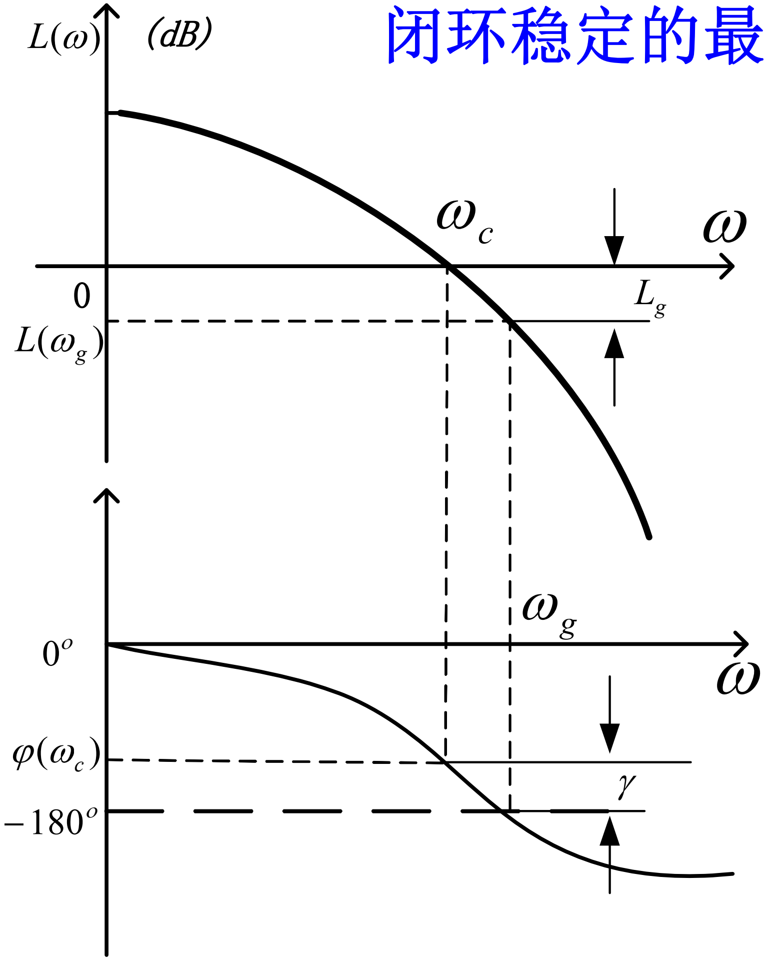


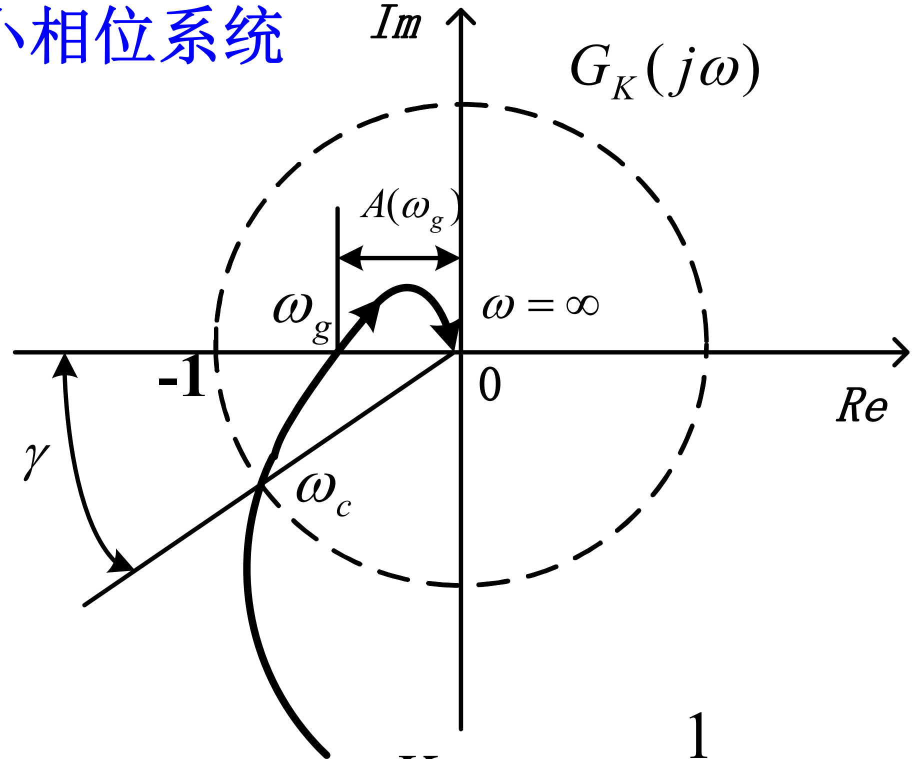
Z=2N’+P=2×(1-0)+0=2

4.5.5 稳定裕度

稳定裕度包括相位稳定裕度和幅值稳定裕度

闭环稳定的最小相位系统





$$K_g=\frac{1}{\left|G_K(j\omega_g)\right|}$$

$$\gamma=180^\circ+\angle G_K(j\omega_c)$$

$$L_g=20\lg K_g=-20\lg\left|G_K(j\omega_g)\right|$$

4.5.5 稳定裕度

稳定裕度包括相位稳定裕度和幅值稳定裕度

$$\gamma = 180^\circ + \angle G_K(j\omega_c)$$

$$K_g = \frac{1}{\left|G_K(j\omega_g)\right|}$$

$$L_g = 20\lg K_g = -20\lg\left|G_K(j\omega_g)\right|$$

稳定最小相位系统的相位裕度和对幅值裕度都是正的。

Discussions

- 最小相位系统的Nyquist判据？
- 非最小相位/开环不稳定系统的Nyquist判据？