



Course

自动控制原理 I

Instructor: 李世华
School of Automation
Southeast university

Any comments, please feel free to contact me
(中心楼608, E-mail: lsh@seu.edu.cn, Tel.:83793785(o))

Chap. 5 控制系统的时域运动性能分析

稳定系统的性能优劣比较→改善

时域响应-系统受外加作用所引起的输出随时间的变化规律.

- 瞬态/动态响应-指系统从初始输出到最终输出的响应过程 (品质问题) 惯性, 阻尼
- 稳态响应是指当时间 t 趋于无穷大时系统的输出 (精度问题) 系统输出最终复现输入的程度。

分析和设计控制系统时, 对各种控制系统性能应该有评判或比较的依据。

往往通过**典型输入信号**对系统的运动性能进行测试;
对系统输出响应进行分析;
据此进行控制系统设计;
对设计好的控制系统同样可以进行响应性能分析。

典型输入信号

如何选择典型输入信号?

(1) 取决于系统在正常工作状况下最常见的输入信号形式。

若该输入信号是随时间增长逐渐变化的, 则可选择斜坡函数作为典型输入信号。(温升)

若该输入信号具有突变的性质, 则可选择阶跃函数。(恒值)
若该输入信号是冲击输入量, 则采用脉冲函数最合适。(干扰)

其它信号: 正弦(振动信号), 方波等。

(2) 对于线性系统, 不同形式的输入信号对应的输出响应虽然不同, 但它们所表征的系统特性是一致的。

很多时候, 我们用单位阶跃函数作为典型输入信号。

5.2.2. 一阶系统瞬态性能分析

零初值条件下的等价关系:

系统对输入信号导数的响应, 就等于系统对该输入信号响应的导数;
系统对输入信号积分的响应, 就等于系统对该输入信号响应的积分。

闭环传递函数	时域输入信号	输出响应
$\frac{1}{TS+1}$	$\delta(t)$	$\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$
	$1(t)$	$1 - e^{-\frac{t}{T}}$
	t	$t - T + Te^{-\frac{t}{T}}$
	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{2}t^2 - Tt + T^2(1 - e^{-\frac{t}{T}})$

5.1 控制系统时域响应的求解

5.1.1 利用传递函数求输出响应

零初始条件下, $c(t) = L^{-1}\{C(s)\} = L^{-1}\{\phi(s)R(s)\}$

5.1.2 利用Z变换求差分方程(离散系统)的输出响应

零初始条件下, $c(z) = Z^{-1}\{C(z)\} = Z^{-1}\{\phi(z)R(z)\}$

零状态响应

非零初始条件下, 输出响应的求法?

Answer: 将非零初始条件引起的零输入响应加上。

例5.3(P.210) 闭环方程为 $\Phi(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 2}$

5.2 控制系统瞬态性能分析

瞬态/动态响应-指系统从初始输出到最终输出(过渡过程)的响应过程(品质问题)

三要素已知情况下:

数学模型

初始条件

外界输入给定

可以通过求出系统时域响应表达式来对其瞬态响应特性和稳态响应特性进行分析。

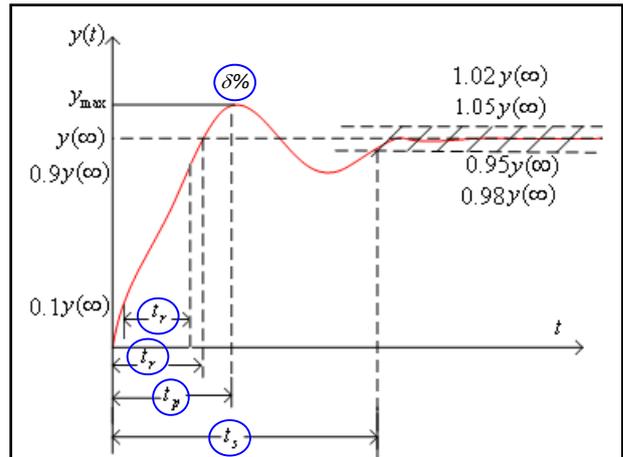
5.2 控制系统瞬态性能分析

5.2.1 瞬态性能指标

系统的性能指标—以准确的定量方式来描述系统性能的量
动态性能指标
稳态性能指标

接下来我们分析**零初始条件**下,连续LTI系统在单位阶跃函数输入作用下输出响应的瞬态性能指标。

稳定的连续LTI系统对单位阶跃函数的响应通常有两种类型:
 衰减振荡
 单调变化



5.2.1 瞬态性能指标

1、上升时间 t_r

输出响应第一次达到稳态值 $y(\infty)$ 的时间。

考虑到不敏感区或者允许误差,有时取 $y(\infty)$ 的10%上升到90%所需的时间。

2、峰值时间 t_p

输出响应超过稳态值 $y(\infty)$ 达到第一个峰值 y_{max} 所需的时间。

3、最大超调量(简称超调量) $\delta\%$

瞬态过程中输出响应的最大值超过稳态值的百分数,即

$$\delta\% = \frac{(y_{max} - y(\infty))}{y(\infty)} \times 100\%$$

5.2.1 瞬态性能指标

4、调节时间(或过渡时间) t_s

当 $y(t)$ 和 $y(\infty)$ 之间的误差达到规定的**允许误差范围**($\Delta\%$),并且以后不再超过此值所需的最小时间。即当 $t \geq t_s$ 后,有

$$|y(t) - y(\infty)| \leq |y(\infty)| \times \Delta\% \quad (\Delta = 5 \text{ 或 } 2)$$

5、振荡次数 N

在调节时间内, $y(t)$ 偏离 $y(\infty)$ 的振荡次数。

(1)快动作性指标—表示瞬态过程进行的快慢;

上升时间、峰值时间

(2)振荡性指标—反映瞬态过程的振荡激烈程度;

超调量和振荡次数

(3) **综合性指标**——**调节时间**从**整体上**反映系统的快速性,但又可看成是同时反映响应速度和振荡(阻尼)程度的。

上升时间、超调量和调节时间是最常用的动态性能指标。

5.2.1 瞬态性能指标

(1)具有单调变化的单位阶跃响应过程通常只用调节时间和上升时间(由稳态值的10%上升到90%所需时间)2个指标。

(2)离散LTI系统的瞬态性能指标

(3)实际系统性能指标的计算—可以直接根据实际系统的**时域响应曲线**求得。

5.2 控制系统瞬态性能分析

5.2.2. 一阶系统瞬态性能分析

意义:许多实际的控制系统可以近似为一阶系统
 即系统特征方程以一个实根为主

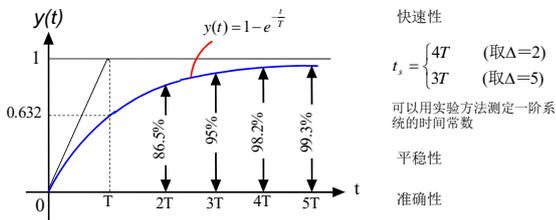
例如电加热炉炉温响应,直流电机(忽略电枢电感)

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ts+1} \quad T=RC$$

$$Y(s) = \frac{1}{Ts+1} U(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, t \geq 0$$

5.2.2. 一阶系统瞬态性能分析



快速性
 $t_s = \begin{cases} 4T & (\text{取}\Delta=2) \\ 3T & (\text{取}\Delta=5) \end{cases}$
 可以用实验方法测定一阶系统的时间常数

平稳性
 准确性

5.2.2. 一阶系统瞬态性能分析



前置放大器的增益 $K=1$ ，计算调节时间 t_s 。
 如果要 $t_s \leq 1$ 秒 (取 $\Delta=2$) 确定 K 值的大小。

$$\Phi(s) = \frac{K/s}{1 + K/s} = \frac{1}{s/K + 1} \quad T = 1/K$$

$$t_s = 3T = 3/K|_{k=1} = 3 \text{ (秒)} \quad (\text{取}\Delta=5)$$

$$t_s = 4T = 4/K|_{k=1} = 4 \text{ (秒)} \quad (\text{取}\Delta=2)$$

$$t_s = 4T = 4/K \leq 1$$

$$K \geq 4$$

增大放大器增益 (开环增益)，可以起到使一阶系统阶跃响应加速的作用。

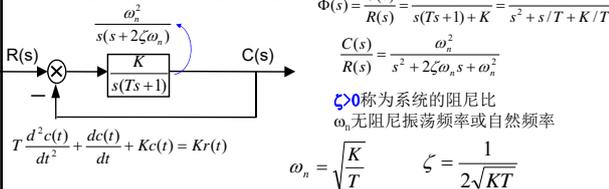
5.2 控制系统瞬态性能分析

5.2.3 典型二阶系统瞬态性能分析

意义：二阶系统不仅在工程实际中比较常见，而且许多高阶系统在一定条件下也可以近似为二阶系统。

二阶系统的单位阶跃响应有振荡和非振荡两种情况

一、典型二阶系统的传递函数



$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(Ts+1)+K} = \frac{K/T}{s^2 + s/T + K/T}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$\zeta > 0$ 称为系统的阻尼比
 ω_n 无阻尼振荡频率或自然频率

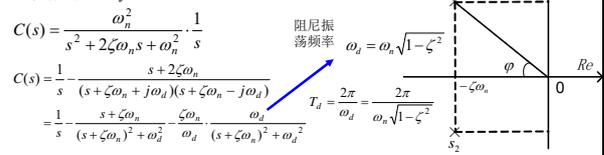
$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}} \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{KT}}$$

$$T \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + \frac{dc(t)}{dt} + Kc(t) = Kr(t)$$

5.2.3 典型二阶系统瞬态性能分析

二、典型二阶系统的单位阶跃响应

1. 欠阻尼 $0 < \zeta < 1$



$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}$$

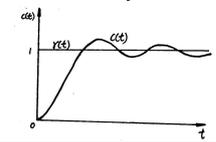
$$C(s) = \frac{1}{s} \frac{s + 2\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)} = \frac{1}{s} \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \cos\omega_d t - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\omega_d t$$

$$= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos\omega_d t + \frac{\omega_d \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\omega_d t \right) \quad t \geq 0$$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} (\sqrt{1-\zeta^2} \cos\omega_d t + \zeta \sin\omega_d t)$$

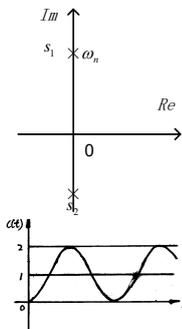
$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \varphi) \quad t \geq 0 \quad \varphi = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$



5.2.3 典型二阶系统瞬态性能分析

2. 零阻尼 $\zeta=0$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}$$

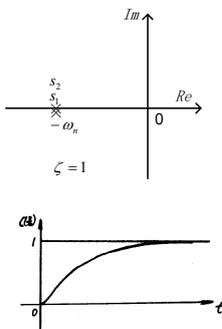


5.2.3 典型二阶系统瞬态性能分析

3. 临界阻尼 ($\zeta=1$)

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} = \frac{1}{s} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} - \frac{1}{s + \omega_n}$$

$$c(t) = 1 - (\omega_n t + 1)e^{-\omega_n t}, \quad t \geq 0$$

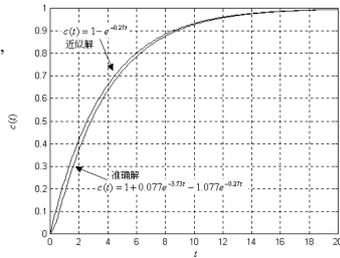
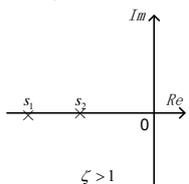


5.2.3 典型二阶系统瞬态性能分析

4、过阻尼 ($\zeta > 1$) $s_1 = -(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$
 $s_2 = -(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s-s_1)(s-s_2)}$$

$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{s_1 t}}{-s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{-s_2} \right)$$

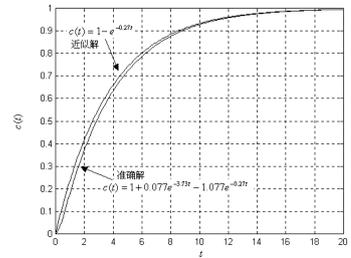


5.2.3 典型二阶系统瞬态性能分析

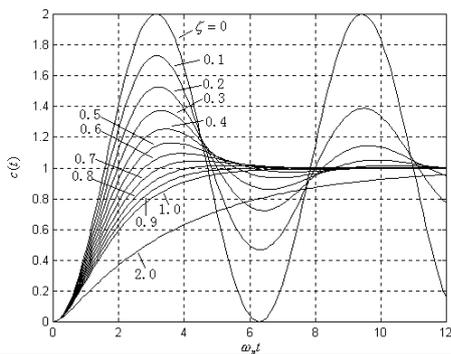
4、过阻尼 ($\zeta > 1$) $s_1 = -(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$
 $s_2 = -(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$

$$\zeta \gg 1 \quad \frac{C(s)}{R(s)} \approx \frac{-s_2}{s-s_2}$$

$$c(t) = 1 - e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}, t \geq 0$$



5.2.3 典型二阶系统瞬态性能分析



P.264
例5.19

5.2.3 典型二阶系统瞬态性能分析

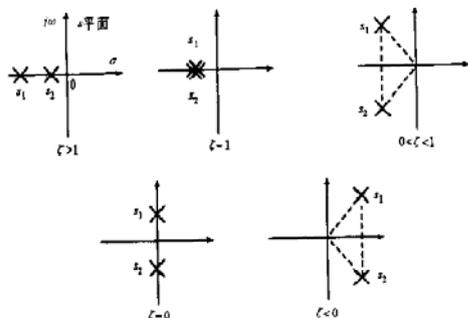
阻尼比越小，超调量越大，上升时间越短，振荡程度越加严重

$\zeta = 0.4 \sim 0.8$ 的动态过程，不仅具有比 $\zeta = 1$ 时更短的调节时间，而且振荡程度也不严重。

指示仪表系统—临界阻尼系统或过阻尼系统

对于相同 ζ 的系统，其过渡时间与 ω_n 值成反比

二阶系统的阻尼比 ζ 的不同情况



阻尼比不同取值时特征根在s平面上的位置

5.2.3 典型二阶系统瞬态性能分析

三、典型二阶系统瞬态性能指标

(一) 衰减振荡的瞬态过程

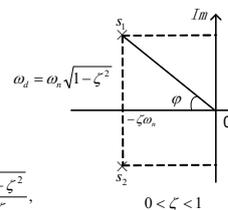
1、上升时间 t_r

$$1 - e^{-\zeta\omega_d t_r} (\cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_r) = 1$$

$$1 - \frac{e^{-\zeta\omega_d t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_r + \varphi) = 1 \quad \varphi = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$t_r = \frac{\pi - \varphi}{\omega_d} = \frac{\pi - \varphi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

当阻尼比不变化时，增大自然频率就会导致上升时间缩短；
 当阻尼振荡频率不变，阻尼比越小，上升时间越短。



(一) 衰减振荡的瞬态过程

2、峰值时间 $t_p \quad \left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=t_p} = 0$

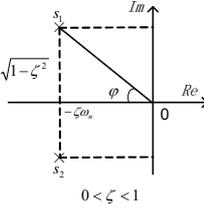
$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \varphi), t \geq 0$

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$
 $\varphi = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$
 $\sin(\omega_d t_p + \varphi) = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \cos(\omega_d t_p + \varphi)$

$\tan(\omega_d t_p + \varphi) = \tan \varphi$

$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$

峰值时间等于阻尼振荡周期的一半。
 峰值时间与闭环极点的虚部数值成反比。

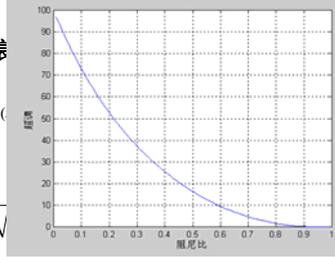


(一) 衰

3、最大超调量 $\delta\%$

$\delta\% = [c(t_p) - 1] \times 100\%$

$= -e^{-\zeta\omega_n t_p} (\cos \omega_d t_p + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}})$
 $= e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$



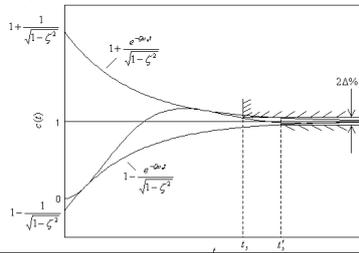
通常取控制系统的最大超调量 $\delta=25\% \sim 1.5\%$, 对应阻尼比为 $\zeta=0.4 \sim 0.8$

二阶欠阻尼系统超调量与阻尼比关系曲线 (P. 225 图5. 20)

(一) 衰减振荡的瞬态过程

4. 调节时间 $t_s \quad c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \varphi), t \geq 0 \quad 1 \pm \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

$\left| \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}) \right| \leq \Delta\%, t \geq t_s$



(一) 衰减振荡的瞬态过程

4. 调节时间 $t_s \quad c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \varphi), t \geq 0 \quad 1 \pm \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

$\left| \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}) \right| \leq \Delta\%, t \geq t_s$

我们用 $c(t)$ 的包络线近似地代替 $c(t)$ 作为求 t_s

$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \Delta\%$

$\Delta = 2 \quad t_s \approx -\frac{1}{\zeta\omega_n} \ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2}) \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$ 较小的阻尼比时!

$\Delta = 5 \quad t_s \approx -\frac{1}{\zeta\omega_n} \ln(0.05\sqrt{1-\zeta^2}) \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$

调节时间与闭环极点的实部数值成反比
 调节时间与系统阻尼比和自然频率的乘积成反比

(一) 衰减振荡的瞬态过程

5、振荡次数 $N = \frac{t_s}{T_d} \quad T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$

取 $\Delta = 2$ 时

$N = \frac{2\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta} = \frac{-2}{\ln(\delta\%)}$

取 $\Delta = 5$ 时

$N = \frac{1.5\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta} = \frac{-1.5}{\ln(\delta\%)}$

振荡次数 N 只与阻尼比 ζ 有关

*不同指标之间的矛盾
 上升时间和超调量

*最佳阻尼系数 $\zeta = 0.707 \quad \delta\% = 5\%$

(二) 非振荡的瞬态过程

临界阻尼系统和过阻尼系统应用场合:

不允许瞬态响应出现超调的实际控制系统

调节时间的求法—工程上采用的方法是利用数值解法求出不同值下的相对调节时间, 然而制成曲线以供查用

$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{s_1 t}}{-s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{-s_2} \right), t \geq 0$

过阻尼系统调节时间特性曲线 见P. 229 图5. 23

$(-s_1)/(-s_2) = 1 \quad t_s = \frac{4.75}{-s_2} \quad (\zeta = 1) \quad \frac{1 + \frac{-s_2}{-s_1}}{\zeta} = \frac{-s_2}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}$

$(-s_1)/(-s_2) \geq 4 \quad t_s = \frac{3}{-s_2}$

四、二阶系统计算举例及系统性能的提高

P230 例5.7 考虑如图5.11所示随动系统, $K=16$, $T=0.25$ 秒。

试求: (1) 计算瞬态性能指标 $\delta\%$ 和 t_s ;

(2) 若要求 $\delta\%=16\%$, 当 T 不变时 K 应取何值?

(3) 若要求系统的单位阶跃响应无超调, 且调节时间 $t_s \leq 10$ 秒, 开环增益 K 应取多大? 此时为多少?

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{KT}} = \frac{1}{2\sqrt{16 \times 0.25}} = 0.25, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}} = \sqrt{\frac{16}{0.25}} = 8 \text{ rad/s}$$

$$\delta\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = e^{-\frac{0.25\pi}{\sqrt{1-0.25^2}}} \times 100\% = 44.43\%$$

$$-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \ln \delta$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{\ln^2 \delta\%}{\pi^2 + \ln^2 \delta\%}} = \sin(\arctg \frac{-\ln \delta\%}{\pi}) = 0.5$$

$$\zeta = 1 \quad K = \frac{1}{4T^2} = 1 \quad \omega_n = \sqrt{4K} = 2$$

$$s_1 = s_2 = -2 \quad t_s = 4.75 / (-s_2) = 2.375 \text{ s}$$

减小超调量措施—
增加阻尼—降低增益

四、二阶系统计算举例及系统性能的提高

瞬态性能指标和实际系统参数 K 、 T 之间的关系

K 越大, 系统振荡越严重; 减小 K ?

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}} \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{KT}}$$

T 增大对系统的瞬态性能指标是不利

系统性能的提高方法之一: 速度反馈

为改善系统性能, 在不改变 K 的情况下, 采用速度反馈(即微分反馈)使系统阻尼提高。

$$R(s) \rightarrow \text{Block Diagram} \rightarrow C(s) \quad \Phi(s) = \frac{K}{s(Ts+1) + K(\tau s+1)} = \frac{K/T}{s^2 + \frac{1+K\tau}{T}s + \frac{K}{T}}$$

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{K}{T}} \quad \zeta_1 = \frac{1+K\tau}{2\sqrt{KT}}$$

系统性能的提高方法之二: 比例-微分校正(引入开环零点)

$$R(s) \rightarrow \text{Block Diagram} \rightarrow C(s) \quad \Phi(s) = \frac{\omega_n^2(\tau s+1)}{s^2 + (2\zeta\omega_n + \omega_n^2\tau)s + \omega_n^2}$$

$$\omega_{nd} = \omega_n \quad \zeta_d = \zeta + \frac{\tau\omega_n}{2}$$

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{\omega_n^2(\tau s+1)}{(s^2 + 2\zeta_d\omega_n s + \omega_n^2)s} = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta_d\omega_n s + \omega_n^2)s} + \frac{\omega_n^2\tau}{s^2 + 2\zeta_d\omega_n s + \omega_n^2}$$

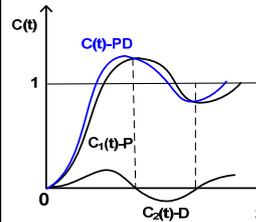
$$c(t) = c_1(t) + c_2(t) \quad C_1(s) \cdot \tau s = C_2(s)$$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta_d\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta_d^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta_d^2}\omega_n t + \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta_d^2}}{\zeta_d}) + \frac{\tau\omega_n}{\sqrt{1-\zeta_d^2}} e^{-\zeta_d\omega_n t} \sin \sqrt{1-\zeta_d^2}\omega_n t$$

$$c(t) = c_1(t) + \frac{1}{T_d} \frac{dc_1(t)}{dt} \quad \tau = \frac{1}{T_d}$$

四、二阶系统计算举例及系统性能的提高

系统性能的提高方法之二: 比例-微分校正(引入开环零点)



$$\text{取 } \Delta = 2 \text{ 时 } t_s = (4 + \ln \frac{1}{\zeta_d \omega_n}) \frac{1}{\zeta_d \omega_n}$$

$$\text{取 } \Delta = 5 \text{ 时 } t_s = (3 + \ln \frac{1}{\zeta_d \omega_n}) \frac{1}{\zeta_d \omega_n}$$

1为附加零点到任一共轭复数极点的距离

D 的作用: 提前反映出误差变化趋势, 使响应更快

四、二阶系统计算举例及系统性能的提高

2种系统性能改善方法的应用: PD校正与速度反馈

增加硬件传感器的成本问题

PD校正的物理实现问题

D 控制的高速滤波特性

校正装置输入端有噪声或高频扰动的情况

五、扰动作用下典型二阶系统分析 (P.236-238)

5.2.4 高阶系统瞬态性能分析

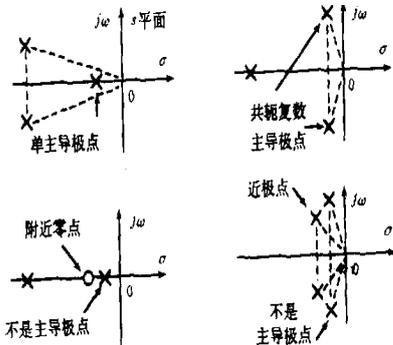
$$\Phi(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

很难直接分析高阶系统瞬态性能指标

间接/近似分析高阶系统瞬态性能指标方法—寻找闭环主导极点

闭环主导极点—在高阶系统中, 如果存在一对离虚轴最近的共轭复数极点且周围没有零点, 其它闭环极点与虚轴间的距离比起这一对共轭复数极点与虚轴间的距离大五倍以上, 则这一对共轭复数极点在系统响应输出中对应函数项的衰减最慢且系数很大。

闭环主导极点的几何图示



习题

- 已知系统闭环传递函数如下，用主导极点概念分析其动态性能。

$$\Phi(s) = \frac{8(s+2.1)}{(s+8)(s+2)(s^2+s+1)}$$

闭环根分布示意图

$$\Phi(s) = \frac{0.138}{s+8} + \frac{0.0444}{s+2} + \frac{-0.0912-0.6361i}{s+0.5-0.866i} + \frac{-0.0912+0.6361i}{s+0.5+0.866i}$$

验证：高阶系统主导极点性质

$$\bar{\Phi}(s) = \frac{1.05}{s^2+s+1}$$

讨论

- 为了保证动态性能，任意阶数的LTI系统其闭环极点的分布应该满足什么条件？

Chap. 5 控制系统的时域运动性能分析

5.3 控制系统稳态响应/稳态性能分析 $y_s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$

稳态响应是指当时间 t 趋于无穷大时系统的输出(精度问题)
稳态误差是评价系统对于给定信号的跟踪精度，是系统控制准确度(控制精度)的一种度量。

稳态误差反映系统输出最终复现输入的程度。

对象—稳定的SISO系统(传递函数描述) 动态性能取决于系统什么?
稳态误差取决于:

系统结构/型别

输入信号类型

→ why?

描述稳态误差的两类系数: $\begin{cases} \text{静态误差系数} \\ \text{动态误差系数} \end{cases}$

5.3.1 控制系统的误差与稳态误差

1. 误差定义 $\varepsilon(t) = y_o(t) - y(t)$ $\varepsilon_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$
期望输出 稳态误差

系统稳态误差由输入信号和系统的结构所决定的。

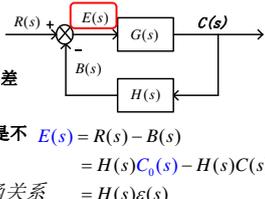
2. 误差与偏差的区别

• 单位反馈系统 $H(s)=1$ ，系统的误差和偏差是相等的。

• 非单位反馈系统 $H(s) \neq 1$ ，偏差和误差是不一样的。

注：偏差与各个通道环节具体传函关系

注：稳态分析常常以偏差代替误差进行研究， $\varepsilon_{ss} \leftarrow e_{ss}$ ，解释？



5.3.2 误差的数学模型

$$E(s) = \Phi_e(s)R(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1+G_K(s)}$$

前提：稳态误差存在!(稳定于极限值存在!)

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + \frac{K}{s^v}} = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} (s^{v+1}R(s))}{K + \lim_{s \rightarrow 0} s^v}$$

$$G_K(s) = \frac{K}{s^v} \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_1} (\tau_k^2 s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)$$

无差度阶数/型别

系统稳态误差只由稳态的三要素决定：
输入信号 $R(s)$ ；系统的结构参数 v ；开环增益 K

Note: 当 $G_K(s)$ 不是标准形式时，用一般表达式求解

同型别
同增益
同输入下
稳定系统的
稳态同。

5.3 控制系统稳态性能分析

5.3.3 稳态误差分析与静态误差系数

一、阶跃输入

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+G_K(s)} \cdot \frac{A}{s} = \frac{A}{1+\lim_{s \rightarrow 0} G_K(s)} = \frac{A}{1+K_p}$$

$$\text{静态位置误差系数 } K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_K(s) = \begin{cases} K, & v=0 \\ \infty, & v \geq 1 \end{cases}$$

$$e_{ss} = \begin{cases} \frac{A}{1+K}, & v=0 \\ 0, & v \geq 1 \end{cases}$$

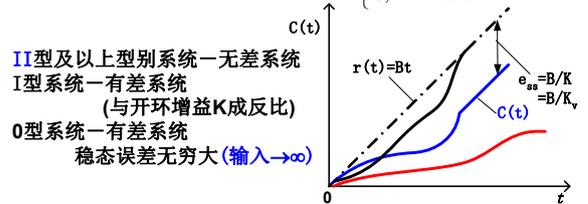
I型及以上型别系统—无差系统
0型系统—有差系统(与开环增益K成反比)

Q: P, PI控制的物理意义?

5.3.3 稳态误差分析与静态误差系数

二、斜坡输入 $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+G_K(s)} \cdot \frac{B}{s^2} = \frac{B}{\lim_{s \rightarrow 0} s G_K(s)} = \frac{B}{K_v}$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_K(s) = \begin{cases} 0, & v=0 \\ K, & v=1 \\ \infty, & v \geq 2 \end{cases} \quad e_{ss} = \begin{cases} \infty, & v=0 \\ \frac{B}{K}, & v=1 \\ 0, & v \geq 2 \end{cases}$$



II型及以上型别系统—无差系统
I型系统—有差系统
(与开环增益K成反比)
0型系统—有差系统
稳态误差无穷大(输入 $\rightarrow \infty$)

5.3.3 稳态误差分析与静态误差系数

三、抛物线输入 $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+G_K(s)} \cdot \frac{C}{s^3} = \frac{C}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_K(s)} = \frac{C}{K_a}$

$$\text{静态加速度误差系数 } K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_K(s) = \begin{cases} 0, & v=0,1 \\ K, & v=2 \\ \infty, & v \geq 3 \end{cases}$$

$$e_{ss} = \begin{cases} \infty, & v=0,1 \\ \frac{B}{K}, & v=2 \\ 0, & v \geq 3 \end{cases}$$

III型及III以上型别系统—无差系统
II型系统—有差系统(与开环增益K成反比)
0, I型系统—有差系统, 稳态误差无穷大(输入 $\rightarrow \infty$)

5.3.3 稳态误差分析与静态误差系数

e_{ss}	K_i	$r(t)=A \cdot 1(t)$	$r(t)=B \cdot t$	$r(t)=0.5C \cdot t^2$	
0型系统	$\frac{A}{1+K_p}$	$K_p = K$	∞	$K_v = 0$	$K_a = 0$
I型系统	0	$K_p = \infty$	$\frac{B}{K_v}$	$K_v = K$	$K_a = 0$
II型系统	0	$K_p = \infty$	0	$K_v = \infty$	$K_a = K$

- 有界稳态误差情况: 开环增益K越大, 稳差越小。
- 信号跟踪能力: 系统的型别越高v, 能够跟踪的信号阶次就越高

Recall: 二阶系统增加阻尼的方法?

稳态误差, 动态响应与稳定性

> 系统稳态响应性能(稳态误差)与动态响应性能的关系

典型二阶系统, 开环增益K越大, 阻尼越小, 易振荡

↔
增益K越大, 稳差越小

> 系统稳态响应性能(稳态误差)与稳定性的关系

• 开环增益K越大, 稳差越小 ↔ 开环稳定系统, 增益K越大, 稳定性(裕度)就越差

• 系统的型别v越高, 能够跟踪的信号阶次就越高, 稳态响应更好

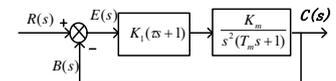
↔
开环系统积分环节越多, 稳定性就越差

> 分析与设计的基本要求

兼顾系统的稳定性(裕度), 稳态误差, 动态性能

5.3.3 稳态误差分析与静态误差系数

例5.10 PD控制系统如图所示, 输入信号为 $r(t)=1(t)+t+0.5t^2$, 作稳定性分析及稳态误差分析。



$$s^2(T_m s + 1) + K_1 K_m (\tau s + 1) = 0$$

$$K_1 > 0, K_m > 0, \tau > 0, T_m > 0 \text{ 及 } \tau > T_m$$

Q: 只用P作控制器, 能否有效控制系统? Why? 意义?

$$G_K(s) = \frac{K_1 K_m (\tau s + 1)}{s^2 (T_m s + 1)}$$

$$K_p = \infty, K_v = \infty, K_a = K = K_1 K_m$$

$$r_1(t) = 1(t), \quad e_{ss1} = 0$$

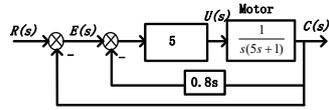
$$r_2(t) = t, \quad e_{ss2} = 0$$

$$r_3(t) = \frac{1}{2}t^2, \quad e_{ss3} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{K_1 K_m}$$

增大PD控制器的增益K, 或开环增益, 可减少对加速度信号的跟踪误差。

5.3.3 稳态误差分析与静态误差系数

例5.11 具有测速发电机内反馈的位置随动系统如图所示，输入信号为 $1(t)$, t , $0.5t^2$ 时，稳态分析，并作出物理说明



$$G_K(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad K_p = \infty, K_v = 1, K_a = 0$$

$$r_1(t) = 1(t), \quad e_{ss1} = 0$$

$$r_2(t) = t, \quad e_{ss2} = 1$$

$$r_3(t) = 0.5t^2, \quad e_{ss3} = \infty$$

阶跃输入: $c(\infty) = C$ 恒定位置(角位移) \Rightarrow 稳态时电机停转 \Rightarrow 绕组电压 $u(\infty) = 0 \Rightarrow$ (测速反馈 $c'(\infty) = 0$) $E(\infty) = 0$, $c(\infty) = C$, 不存在稳态误差

斜坡输入: 稳态速度 $c'(\infty) = C$ 恒定转速 \Rightarrow 绕组电压 $u(\infty) = U \Rightarrow E(\infty) = 0.8c'(\infty) + 0.2u(\infty) > 0$, 一定存在稳态误差

抛物线输入: 稳态加速度 $c''(\infty) = C$ 斜坡增长转速 \Rightarrow 绕组电压 $u(\infty) = at \Rightarrow E(\infty) = 0.8c'(\infty) + 0.2u(\infty) = \infty$, 稳态误差 ∞

5.3 控制系统稳态性能分析

5.3.4 控制系统的动态误差

稳态误差不是有界极限值时，稳态误差随时间变化情况 ($t \rightarrow \infty$)

> 动态误差系数求法之一 $\Phi_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G_K(s)} = \frac{1}{k_0 + \frac{1}{k_1}s + \frac{1}{k_2}s^2 + \dots}$

Why 在 $s=0$ 展开? $\frac{1}{k_0} = \frac{1}{1+G_K(s)} \Big|_{s=0}, \quad \frac{1}{k_1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{1+G_K(s)} \right] \Big|_{s=0}$

$$E(s) = \Phi_E(s)R(s) = \frac{1}{k_0}R(s) + \frac{1}{k_1}sR(s) + \frac{1}{k_2}s^2R(s) + \dots$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{k_0}r(t) + \frac{1}{k_1}\dot{r}(t) + \frac{1}{k_2}\ddot{r}(t) + \dots$$

k_0, k_1, k_2 - 动态位置, 速度, 加速度误差系数

5.3.4 控制系统的动态误差

> 动态误差系数求法之二 $\Phi_E(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n}$

$$\Phi_E(s) = C_0 + C_1s + C_2s^2 + \dots$$

$$E(s) = \Phi_E(s)R(s) = C_0R(s) + C_1sR(s) + C_2s^2R(s) + \dots \quad k_i = \frac{1}{C_i}$$

$$E(s) = \Phi_E(s)R(s) = \frac{1}{k_0}R(s) + \frac{1}{k_1}sR(s) + \frac{1}{k_2}s^2R(s) + \dots$$

> 特定系统动态误差与静态误差系数之间的关系

0型系统, $r(t) = 1(t)$ $k_0 = 1 + K_p$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{k_0}R(s) + \frac{1}{k_1}sR(s) + \dots \right] \Big|_{R(s)=\frac{1}{s}} = \frac{1}{k_0} = \frac{1}{1+K_p}$$

5.3.4 控制系统的动态误差

> 特定系统动态误差与静态误差系数之间的关系

I型系统, $r(t) = t$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{k_1}sR(s) + \frac{1}{k_2}s^2R(s) + \dots \right] \Big|_{R(s)=\frac{1}{s^2}} = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{K_v}$$

$$k_I = K_v \quad k_0 = \infty$$

$$\frac{1}{k_0} = \frac{1}{1+G_K(s)} \Big|_{s=0} = \frac{1}{1+\frac{K}{s}} \Big|_{s=0} = 0$$

II型系统, $r(t) = 0.5t^2$

$$k_2 = K_a \quad k_I = \infty \quad k_0 = \infty$$

5.3.4 控制系统的动态误差

例5.14 试比较系统1和系统2的静态和动态误差系数。试写出两个系统的稳态误差表达式。

$$G_1(s) = \frac{10}{s(s+1)} \quad G_2(s) = \frac{10}{s(5s+1)} \quad r(t) = R_0 + R_1t + \frac{1}{2}R_2t^2 + e^{-R_3t}, \quad t \geq 0$$

$$K_{p1} = K_{p2} = \infty \quad \Phi_{E1}(s) = \frac{s+s^2}{10+s+s^2} = 0.1s + 0.09s^2 - 0.019s^3 - \dots$$

$$K_{v1} = K_{v2} = 10 \quad k_0 = \infty, k_I = 10, k_2 = 11.11$$

$$K_{a1} = K_{a2} = 0 \quad \Phi_{E2}(s) = \frac{s+5s^2}{10+s+5s^2} = 0.1s + 0.49s^2 - 0.099s^3 - \dots$$

$$k_0 = \infty, k_I = 10, k_2 = 2.04$$

$$r(t) = R_0 + R_1t + \frac{1}{2}R_2t^2 \quad e_1(t) = 0.1(R_1 + R_2t) + 0.09R_2$$

$$\dot{r}(t) = R_1 + R_2t, \ddot{r}(t) = R_2, \ddot{\dot{r}}(t) = 0 \quad t \rightarrow \infty \quad e_2(t) = 0.1(R_1 + R_2t) + 0.49R_2$$

5.3 控制系统稳态性能分析

5.3.5 扰动输入作用下的稳态误差

• 扰动信号无处不在 (加工过程的负载转矩变换)

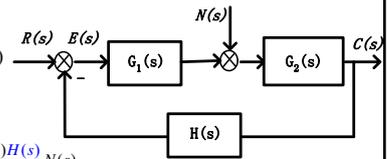
• 为提高系统抗干扰能力 - 要求分析扰动信号引起的稳态误差, 并且设法减小或消除扰动引起的稳差。

$$C_N(s) = \Phi_N(s) \cdot N(s)$$

$$= \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s)$$

$$= \frac{G_2(s)}{1+G_K(s)} N(s)$$

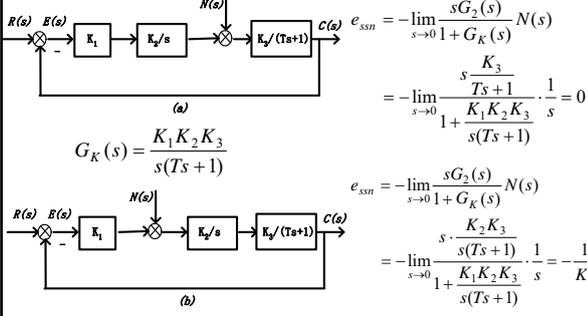
$$E_N(s) = 0 - H(s)C_N(s) = -\frac{G_2(s)H(s)}{1+G_K(s)} N(s)$$



系统给定输入和扰动输入同时存在, 可用叠加原理将其分别引起的稳差叠加。实际随动系统稳差可取输入和干扰两者引起稳差的绝对值之和 (P.257 例5.16)

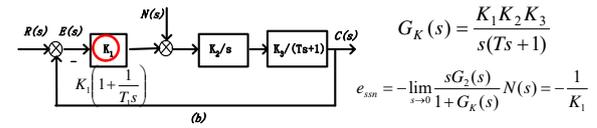
5.3.5 扰动输入作用下的稳态误差

例5.15 系统1和系统2分别如图5.42(a)、(b)所示，试计算在单位阶跃扰动信号作用下两个系统的稳态误差。(参数稳定范围?)



5.3.6 减小或消除稳态误差的措施

- 增大系统开环增益或扰动作用点之前系统的前向通道增益。
增大系统开环增益, 减少给定输入引起的稳差;
增大扰动点之前的前向通道增益, 可**同时**减少输入和扰动引起的稳差
- 设置串联积分校正环节 (加在扰动点之后的前向通道?)
在系统的前向通道或主反馈通道设置串联积分环节, 提高开环系统**型别**, 消除给定输入引起的稳差;
在**干扰输入**的反馈通道设置串联积分环节, 可**同时**消除输入和扰动引起的稳差 **PI控制器**



5.3 控制系统稳态性能分析

5.3.7 离散系统的稳态误差

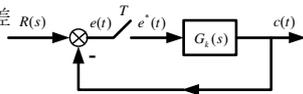
$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\Phi_E(z)R(z)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{1+G_K(z)} R(z)$$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G_K(z)$$

$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G_K(z)$$

$$K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G_K(z)$$



离散系统稳态误差

e_{ss}	K_i	$r(t)=A \cdot 1(t)$	$r(t)=B \cdot t$	$r(t)=0.5C \cdot t^2$
0型系统	$\frac{A}{1+K_p}$	K_p	$K_v = 0$	$K_a = 0$
I型系统	0	$K_p = \infty$	K_v	$K_a = 0$
II型系统	0	$K_p = \infty$	$K_v = \infty$	K_a

Example 5.18 (P. 262)

注: 先判稳!